UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

53. BAND, 3. HEFT
MIT 11 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM SEPTEMBER 1949)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1949

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

53. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Koschmieder, L. Verallgemeinerte Ableitungen und hypergeometrische Funktionen 169

Schaller, H. Zum räumlichen Rückwärtseinschneiden 184

Hornich, H. Beschränkte Integrale auf speziellen transcendenten Riemannschen Flächen 187

Berwald †, L. Obere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei Eilinien und die entsprechenden Größen bei Eiflächen 202

Rößler, F. Über verallgemeinerte Reliefperspektiven 211

Rédei, L. Die Reduktion des gruppentheoretischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen 221

Inzinger, R. Über eine lineare Transformation in den Mengen der konvexen und der stützbaren Bereiche einer Ebene 227

Buchbesprechungen 251

Verallgemeinerte Ableitungen und hypergeometrische Funktionen.[1]

Von
Lothar Koschmieder, Aleppo.

(Eingelangt am 30. August 1948.)

1. In den folgenden Zeilen möchte ich neue Beispiele dafür beibringen, wie sich ein altes Verfahren der höheren Rechnung in der Forschung unserer Tage bewährt. Es besteht in dem Gebrauche der verallgemeinerten Ableitungen. Worauf es von dieser Schöpfung der Analysis hier ankommt, brauche ich nicht nochmals auszuführen; man findet es in einer meiner letzten Arbeiten[1,1] auseinandergesetzt. Gegenstand der Anwendung des Verfahrens sind funktionale Eigenschaften hypergeometrischer Funktionen; über die Geschichte dieser Art seiner Benutzung unterrichtet den der Sache ferner stehenden Leser gleichfalls meine in [1,1] angeführte Abhandlung[1,2]. Dort erfährt er, daß meine Beispiele schon eine Reihe von Vorgängern haben; dennoch scheint es mir am Platze, auf einen bequemen und noch immer mit reicher Ausbeute lohnenden Zugang zur Kenntnis jener Gebilde hinzuweisen.

2. Bevor ich die Beispiele vorführe, verzeichne ich einige zu ihrer Behandlung nötige *allgemeine Regeln* über verallgemeinerte Ableitungen — gleich mit n komplexen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, und in aller Kürze; für $n = 1$ und $n = 2$ findet man sie schon a. a. O.[1,1] zusammengestellt, und zwar in (8.1), ..., (8.5); (9.1), ..., (9.4). Man setze bei beliebigen ξ und φ

---

[1] Über den Inhalt der folgenden Nrn. 1 bis 5 habe ich bei der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Würzburg am 10. IX. 1943 berichtet; infolge der Ungunst der Zeit blieb dieser Vortrag bis heute unveröffentlicht. Zu seinem jetzt möglich gewordenen Drucke habe ich ihn in vielen Stücken umgearbeitet. Manches konnte ich weglassen oder abkürzen, da inzwischen meine in [1,1] genannte Arbeit erschienen ist, auf die ich mich auch wegen der Schrifttumsangaben beziehen werde. Die Nrn. 6 bis 9 habe ich neuerdings hinzugefügt.

[1,1] *L. Koschmieder*, Acta math., Uppsala 79 (1947), 241—254.

$$\frac{\partial^{\sum_k^{1,n}\varphi_k}}{\prod_k^{1,n}\partial x_k^{\varphi_k}}\left(\prod_j^{1,n} x_j^{\xi_j-1}\right)=\prod_k^{1,n}\frac{\partial^{\varphi_k}\, x_k^{\xi_k-1}}{\partial x_k^{\varphi_k}}=$$

$$=\prod_k^{1,n}\frac{\Gamma(\xi_k)}{\Gamma(\xi_k-\varphi_k)}\,x_k^{\xi_k-\varphi_k-1}. \tag{2, 1}$$

Ist eine Funktion W im Gebiete $|x_k-a_k|<R_k$ $(k=1,\ldots,n)$, das K heiße, in die Reihe

$$W(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{m_1,\ldots,m_n}^{0,\infty} A_{m_1,\ldots,m_n}\prod_k^{1,n}(x_k-a_k)^{\xi_k+m_k-1} \tag{2, 2}$$

mit festen $A_{m_1,\ldots,m_n}$ entwickelbar[2, 1], so erklärt man ihre $(\varphi_1+\ldots+\varphi_n)$-te Teilableitung, indem man (2, 2) nach der Vorschrift (2, 1) gliedweise ableitet,

$$\frac{\partial^{\sum_k^{1,n}\varphi_k} W}{\prod_k^{1,n}\partial(x_k-a_k)^{\varphi_k}}=$$

$$=\sum_{m_1,\ldots,m_n}^{0,\infty} A_{m_1,\ldots,m_n}\prod_k^{1,n}\frac{\Gamma(\xi_k+m_k)}{\Gamma(\xi_k+m_k-\varphi_k)}(x_k-a_k)^{\xi_k+m_k-\varphi_k-1}. \tag{2, 3}$$

Wenn $\operatorname{Re}\varphi_k<0$ und $\operatorname{Re}\xi_k>0$ $(k=1,\ldots,n)$, so läßt sich (2, 3) durch ein n-faches Integral darstellen,

$$\frac{\partial^{\sum_k^{1,n}\varphi_k} W}{\prod_k^{1,n}\partial(x_k-a_k)^{\varphi_k}}=\frac{1}{\prod_j^{1,n}\Gamma(-\varphi_j)}\int_{a_1}^{x_1}\cdots\int_{a_n}^{x_n} W(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\prod_k^{1,n}(x_k-\sigma_k)^{-\varphi_k-1}\,d\sigma_k. \tag{2, 4}$$

Um das zu beweisen, ersetzt man rechts $W(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ durch die Entwicklung (2, 2). Dann erscheint neben dem Malteil

---

[1, 2] Siehe dort namentlich die Nrn. 8, 9, 10.

[2, 1] Die Konvergenz der Entwicklungen (2, 2), (2, 3) wird, wo sie hier benutzt werden, außer Frage stehen, da es hypergeometrische Reihen sein werden: von solchen ist bekannt, wie sie sich in dieser Beziehung verhalten.

$\prod_{k}^{1,n} (x_k - \sigma_k)^{-\varphi_k - 1} (\sigma_k - a_k)^{\xi_k - 1}$ die Reihe $\sum_{m_1, \ldots, m_n}^{0,\infty} A_{m_1, \ldots, m_n} \prod_{k}^{1,n} (\sigma_k - a_k)^{m_k}$.

Sie konvergiert in einem mit K gleichmittigen, in K enthaltenen Bereiche (absolut und) gleichmäßig; in einem solchen darf man daher den Integranden gliedweise integrieren. Der Veränderlichenwechsel $\sigma_j = (x_j - a_j)\, s_j + a_j$ führt die etwa geradlinigen Integrationswege der σ_j von a_j nach x_j in $0 \leqq s_j \leqq 1$ über, und die rechte Seite von (2, 4) verwandelt sich in

$$\frac{1}{\prod_{j}^{1,n} \Gamma(-\varphi_j)} \sum_{m_1, \ldots, m_n}^{0,\infty} A_{m_1, \ldots, m_n} \prod_{k}^{1,n} (x_k - a_k)^{\xi_k + m_k - \varphi_k - 1} \cdot \int_0^1 s_k^{\xi_k + m_k - 1} (1 - s_k)^{-\varphi_k - 1}\, ds_k.$$

Nach der bekannten Formel der Integration eines binomischen Differentials

$$\int_0^1 s^{\lambda - 1} (1 - s)^{\mu - 1}\, ds = \frac{\Gamma(\lambda)\, \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

geht dieser Ausdruck in die rechte Seite von (2, 3) über.

3. *Das erste* der angekündigten *Beispiele* ist eine durch einmalige Integration ausdrückbare *Integraleigenschaft* der *höheren* hypergeometrischen Funktionen *einer* Veränderlichen. Sie lautet in deren Pochhammer-Barnesschen Schreibweise [3, 0]

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p; \\ c_1, \ldots, c_q; \end{matrix} x\right] = \frac{\Gamma(c_1)\, \Gamma(a_{p+1})}{\Gamma(\gamma)\, \Gamma(c_1 - \gamma + a_{p+1} - c_{q+1})\, \Gamma(c_{q+1})} \cdot \int_0^1 s^{c_{q+1} - 1} (1 - s)^{c_1 - \gamma + a_{p+1} - c_{q+1} - 1} F(a_{p+1} - \gamma,\ c_1 - \gamma;\ c_1 - \gamma + a_{p+1} - c_{q+1};\ 1 - s) \cdot {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}; \\ \gamma, c_2, \ldots, c_{q+1}; \end{matrix} sx\right] ds \qquad (3, 1)$$

und gilt, wenn

$$\operatorname{Re} c_1 > \operatorname{Re} \gamma > 0,\ \operatorname{Re}(c_1 - \gamma + a_{p+1}) > \operatorname{Re} c_{q+1} > 0,\ |x| < 1.$$

Für $p = 2$, $q = 1$ — also mit der Gaußschen Reihe als linker Seite —

[3, 0] Eine Verwechselung der Parameter $a_1, \ldots, a_p$ von ${}_pF_q$ mit den Bezugsstellen $a_1, \ldots, a_n$ der Entwicklung (2,2) ist nicht zu befürchten.

hat Erdélyi diese Formel gewonnen[3,1]; sein Fund gab mir den Anstoß zur Aufstellung von (3, 1). Erdélyi erwähnt selbst[3,2] die Verwendbarkeit der verallgemeinerten Ableitungen in diesem Untersuchungsbereich; sie lassen sich in der Tat, wie ich jetzt zeige, zum Beweise von (3, 1) gebrauchen.

Dazu geht man von einer Formel Erdélyis[3,3] aus, die in einem Sonderfalle (dort $n = 1$ zu setzen) die Gestalt hat

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p;\\ c_1, \ldots, c_q;\end{matrix} x\right] = \frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(c_1-\gamma)} $$

$$ \cdot \int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{c_1-\gamma-1}\, {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_p;\\ \gamma, c_2, \ldots, c_q;\end{matrix} sx\right] ds. \qquad (3{,}2) $$

Die Funktion ${}_pF_q$ im Integranden, mit einer Potenz von s vervielfacht, entsteht aus einer andern (2, 2), ebenso abgewandelten höheren hypergeometrischen Funktion durch verallgemeinerte Ableitung. Es ist nämlich

$$ {}_s^{c_{q+1}-1}\, F_{p+1\ q+1}\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_{p+1};\\ \gamma, c_2, \ldots, c_{q+1};\end{matrix} sx\right] $$

$$ = \sum_m^{0,\infty} \frac{(a_1, m)(a_2, m)\ldots(a_p, m)\,(a_{p+1}, m)}{(\gamma, m)(c_2, m)\ldots(c_q, m)\,(c_{q+1}, m)\,(1, m)}\, x^m\, {}_s^{m+c_{q+1}-1} $$

$$ \text{mit } (\alpha, m) = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}, $$

folglich — das ist eine bei Gedankengängen dieser Art häufig sich wiederholende Rechnung[3,4] — nach (2, 3) [mit $n = 1$, $x_1 = s$, $a_1 = 0$, $\varphi_1 = c_{q+1} - a_{p+1}$]

$$ \frac{d^{c_{q+1}-a_{p+1}}}{ds^{c_{q+1}-a_{p+1}}}\left\{ {}_s^{c_{q+1}-1}\, F_{p+1\ q+1}\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_{p+1};\\ \gamma, c_2, \ldots, c_{q+1};\end{matrix} sx\right]\right\} $$

$$ = \frac{\Gamma(c_{q+1})}{\Gamma(a_{p+1})} \sum_m^{0,\infty} \frac{(a_1, m)(a_2, m)\ldots(a_p, m)}{(\gamma, m)(c_2, m)\ldots(c_q, m)\,(1, m)}\, x^m\, {}_s^{m+a_{p+1}-1} $$

[3,1] *A. Erdélyi*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 10 (1939), 176—189; siehe dort S. 185, (20).

[3,2] Ebd. S. 177. — Als Beispiele führt er die auf mehrfach binomische Kerne gegründeten Integraldarstellungen der höheren hypergeometrischen Funktionen an.

[3,3] *Erdélyi*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 8 (1937), S. 273, (5.2).

[3,4] Ihr Ergebnis (3, 3) für $p = 2$, $q = 1$ bei *Erdélyi* [3,1], S. 184.

$$= \frac{\Gamma(c_{q+1})}{\Gamma(a_{p+1})} \; s^{a_{p+1}-1} \; {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p; \\ \gamma, c_2, \ldots, c_q; \end{matrix} sx\right]. \quad {}^{2,1} \qquad (3,3)$$

Setzt man den hieraus sich ergebenden Wert von ${}_pF_q$ in (3,2) rechts ein, so erhält man

$${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p; \\ c_1, \ldots, c_q; \end{matrix} x\right] = \frac{\Gamma(c_1)\,\Gamma(a_{p+1})}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(c_1-\gamma)\,\Gamma(c_{q+1})} \int_0^1 s^{\gamma-a_{p+1}}(1-s)^{c_1-\gamma-1}$$

$$\cdot \frac{d^{c_{q+1}-a_{p+1}}}{ds^{c_{q+1}-a_{p+1}}} \left\{ s^{c_{q+1}-1} \; {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}; \\ \gamma, c_2, \ldots, c_{q+1}; \end{matrix} sx\right]\right\} ds. \qquad (3,4)$$

Hier greift nun die Formel der verallgemeinerten Teilintegration ein; sie lautet [3,5]

$$\int_{z_0}^{z_1} U \frac{d^\omega V}{d(z-z_0)^\omega}\, dz = \int_{z_0}^{z_1} V \frac{d^\omega U}{d(z_1-z)^\omega}\, dz, \qquad (3,5)$$

mit allgemeiner Ordnungszahl ω der Ableitungen der Funktionen U und V von z. Man wende (3, 5) auf das Integral in (3, 4) an, indem man $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $\omega = c_{q+1} - a_{p+1}$, $z = s$ setzt; dann verlagert sich das Ableitungszeichen von der geschweiften Klammer vor den vorhergehenden Bestandteil des Integranden. Nun ist aber die verallgemeinerte Ableitung eines solchen „binomischen Ausdrucks" nach der grundlegenden Formel [3,6]

$$\frac{d^{a-c}}{dx^{a-c}}\,[x^{a-1}(1-x)^{-b}] = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\, x^{c-1} F(a, b; c; x) \qquad (3,6)$$

im wesentlichen eine hypergeometrische Funktion, im vorliegenden Falle mit $1 - s = r$

$$\frac{d^{c_{q+1}-a_{p+1}}}{d\,r^{c_{q+1}-a_{p+1}}} \left[r^{c_1-\gamma-1}(1-r)^{\gamma-a_{p+1}} \right] = \frac{\Gamma(c_1-\gamma)}{\Gamma(c_1-\gamma+a_{p+1}-c_{q+1})}$$

$$\cdot\, r^{c_1-\gamma+a_{p+1}-c_{q+1}-1} F(a_{p+1}-\gamma, c_1-\gamma; c_1-\gamma+a_{p+1}-c_{q+1}; r).$$

Die Einsetzung dieses Wertes der verallgemeinerten Ableitung in die durch die Teilintegration (3, 5) umgestaltete Formel (3, 4) liefert (3, 1).

[3,5] Vgl. [1,1], (10.3). Über die Herkunft dieser Gleichung unterrichtet dort Anm. [10],[4].

[3,6] Siehe *J. Kampé de Fériet*, Acta math., Uppsala 43 (1922), S. 201. Zum Geschichtlichen vgl. die beiden letzten Absätze der Nr. 8 in [1,1].

4. Das *zweite Beispiel*, dem Gebiete der von Lauricella[4,1] eingeführten hypergeometrischen Funktionen *von n Veränderlichen* angehörig, bezieht sich auf ein *einfaches*, mit einer dieser Funktionen, nämlich

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n) \tag{4, 1}$$
$$= \sum_{m_1, \ldots, m_n}^{0, \infty} \frac{(\alpha, m_1 + \ldots + m_n)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_n, m_n)}{(\gamma_1, m_1) \ldots (\gamma_n, m_n)(1, m_1) \ldots (1, m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$$ [4,2]

gebildetes Integral. Es erscheint in der von Feldheim[4,3] angegebenen *Integralgleichung*

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n) \tag{4, 2}$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda - \alpha)} \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\lambda-\alpha-1}$$
$$\cdot F_A(\lambda, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; sx_1, \ldots, sx_n)\, ds;$$

sie gilt unter den Annahmen $\sum_k^{1, n} |x_k| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\alpha > 0$, deren erste die Konvergenz der Reihe (4, 1) sichert[4,4].

Um (4, 2) auf die hier sich einordnende, von Feldheims Beweise abweichende Art herzuleiten, bilde ich mit $0 \leqq t \leqq 1$ nach [(2, 3), $n = 1$][4,5] die — in $t = 1$ linksseitig zu verstehende — verallgemeinerte Ableitung

$$\frac{d^{\alpha-\lambda}}{dt^{\alpha-\lambda}}[t^{\alpha-1} F_A(\lambda, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; tx_1, \ldots, tx_n)]$$
$$= \frac{d^{\alpha-\lambda}}{dt^{\alpha-\lambda}} \sum_M^{0,\infty} t^{\alpha+M-1} (\lambda, M) \sum_{m_1+\ldots+m_n=M} \frac{(\beta_1, m_1)\ldots(\beta_n, m_n)}{(\gamma_1, m_1)\ldots(\gamma_n, m_n)}$$
$$\cdot \frac{x_1^{m_1}}{(1, m_1)} \ldots \frac{x_n^{m_n}}{(1, m_n)}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; tx_1, \ldots, tx_n).$$

Aus diesem ihrem Werte folgt nach der Darstellung [(2, 4), $n = 1$] der verallgemeinerten Ableitung durch ein Integral, bei der $\xi = \alpha$, $\varphi = \alpha - \lambda$ zu setzen ist,

---

4,1 *G. Lauricella*, Rend. Circ. mat. Palermo 7 (1893), 111—158.

4,2 Der Leser entnimmt das hier Nötige über Lauricellas Funktionen bequem dem weiterhin mehrmals heranzuziehenden Werke von *P. Appell* und *J. Kampé de Fériet*, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite (Paris 1926), das ich kurz mit A.-K. anführen werde. Zu (4, 1) vgl. dort S. 114.

4,3 *E. Feldheim*, Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) 9 (1940), S. 244.

4,4 Vgl. A.-K. [4,2], S. 115.

4,5 Soll bedeuten: (2, 3) mit dem Werte 1 von n.

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; tx_1, \ldots, tx_n) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha)}\, t^{1-\lambda}\, \frac{1}{\Gamma(\lambda-\alpha)}$$

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1} F_A(\lambda, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; \tau x_1, \ldots, \tau x_n)\,(t-\tau)^{\lambda-\alpha-1}\, d\tau,$$

— ein Ergebnis, das für $t = 1$ in (4, 2) übergeht.

5. Beim *dritten Beispiele* handelt es sich um ein *n-faches* Integral mit Lauricellaschen Funktionen. Um eine *n*-stufige *Integralgleichung* etwa *der Funktion* F_A zu gewinnen, bilde man im Gebiete K der Nr. 2 (alle $\alpha_k = 0$, $\sum_k^{1,n} R_k \neq 1$)nach (2, 3) [2,1]

$$\frac{\partial^{\sum_k^{1,n}(\nu_k-\gamma_k)}}{\prod_k^{1,n} \partial x_k^{\nu_k-\gamma_k}} \left[\prod_j^{1,n} x_j^{\nu_j-1} F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \nu_1, \ldots, \nu_n; x_1, \ldots, x_n)\right]$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_n}^{0,\infty} \frac{(\alpha, m_1+\ldots+m_n)(\beta_1, m_1)\ldots(\beta_n, m_n)}{(\nu_1, m_1)\ldots(\nu_n, m_n)(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \prod_j^{1,n} \frac{\Gamma(\nu_j+m_j)}{\Gamma(\gamma_j+m_j)} x_j^{\gamma_j+m_j-1}$$

$$= \prod_j^{1,n} \frac{\Gamma(\nu_j)}{\Gamma(\gamma_j)}\, x_j^{\gamma_j-1} F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n). \qquad (5, 1)$$

In dem Sonderfalle $\nu_k = \beta_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ wird daraus, weil

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \beta_1, \ldots, \beta_n; x_1, \ldots, x_n) = (1-x_1-\ldots-x_n)^{-\alpha} \qquad (5, 2)$$

ist [5,1],

$$\frac{\partial^{\sum_k^{1,n}(\beta_k-\gamma_k)}}{\prod_k^{1,n} \partial x_k^{\beta_k-\gamma_k}} \left[\prod_j^{1,n} x_j^{\beta_j-1} (1-\sum_k^{1,n} x_k)^{-\alpha}\right]$$

$$= \prod_j^{1,n} \frac{\Gamma(\beta_j)}{\Gamma(\gamma_j)}\, x_j^{\gamma_j-1} F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n). \qquad (5, 3)$$

Statt (5, 1) kann man nach (2, 4) mit $\xi_k = \nu_k$, $\varphi_k = \nu_k - \gamma_k$ schreiben

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n) = \prod_j^{1,n} \frac{\Gamma(\gamma_j)}{\Gamma(\nu_j)\Gamma(\gamma_j-\nu_j)}\, x_j^{1-\gamma_j}$$

$$\cdot \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \nu_1, \ldots, \nu_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

$$\cdot \prod_k^{1,n} \sigma_k^{\nu_k-1} (x_k-\sigma_k)^{\gamma_k-\nu_k-1}\, d\sigma_k.$$

[5,1] Vgl. A.-K. [4, 2], S. 15, für $n = 2$. Ist übrigens aus (4, 1) ohne weiteres ersichtlich.

Setzt man $\sigma_k = s_k x_k$, so ergibt sich die endgültige Formel[5,2]

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n) = \prod_j^{1,n} \frac{\Gamma(\gamma_j)}{\Gamma(\nu_j)\,\Gamma(\gamma_j - \nu_j)} \cdot \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \nu_1, \ldots, \nu_n; s_1 x_1, \ldots, s_n x_n) \cdot \prod_k^{1,n} s_k^{\nu_k - 1} (1 - s_k)^{\gamma_k - \nu_k - 1}\, ds_k \qquad (5, 4)$$

unter den — schon beim Gebrauch von (2, 4) benutzten — Annahmen $0 < \mathrm{Re}\,\nu_k < \mathrm{Re}\,\gamma_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. — Wenn man $\nu_k = \beta_k$ wählt, entsteht aus (5, 4) nach (5, 2) die bekannte Integraldarstellung der Funktion F_A[5,3]

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n) = \prod_j^{1,n} \frac{\Gamma(\gamma_j)}{\Gamma(\beta_j)\,\Gamma(\gamma_j - \beta_j)} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(1 - \sum_h^{1,n} s_h x_h\right)^{-\alpha} \cdot \prod_k^{1,n} s_k^{\beta_k - 1} (1 - s_k)^{\gamma_k - \beta_k - 1}\, ds_k$$

mit „n-fach binomischem" Kern, die man natürlich auch aus (5, 3) nach (2, 4) hätte gewinnen können.

6. *Weitere Beispiele* bietet *viertens* der *Gestaltswandel* der hypergeometrischen Funktionen. Nur von einem Verfasser fand ich ihn mit den verallgemeinerten Ableitungen in inneren Zusammenhang gebracht, von Lindner, dessen hierher gehörige Arbeit[6,1] ich schon in [1,1] (S. 249[8,3]) anzuführen hatte. Als Stütze der Beweisführung kommt der genannte Gestaltswandel in der die verallgemeinerten Ableitungen benutzenden Abhandlung von Erdélyi[3,1] auf S. 179, 181 und im Entartungsfalle auf S. 183 vor, doch finde ich dort keinen Hinweis darauf, daß er selbst sich mit Hilfe solcher Ableitungen gewinnen ließe.

Lindner befaßt sich mit der Gaußschen Funktion. *Welches ist die Eigenschaft der verallgemeinerten Ableitungen, die sich in den Eulerschen Verwandlungsformeln widerspiegelt?* Auf diese Frage erteilt er in [6,1]

[5,2] Für $n = 2$ habe ich diese Integralgleichung a. a. O. [1,1] in (6.6) angegeben. Was ich über die Geschichte der Formel (5, 4) bei einer $(n = 1)$ und mehr Veränderlichen zu sagen fand, habe ich ebd. in den Nrn. 1, 2, 3 und 6 mitgeteilt.

[5,3] Vgl. A.-K. [4,2], S. 115.

[6,1] *P. Lindner*, S. B. Berliner math. Ges. 7 (1908), 77—83; siehe dort S. 80.

folgende Antwort: *Es ist die* unter gewissen Annahmen auch bei *allgemeinem* Zeiger Λ gültige *Leibnizsche Regel* für die Λ-te Ableitung des Malwertes zweier Funktionen u und v von x,

$$(u\,v)^{(\Lambda)} = \sum_{l}^{0,\infty} \binom{\Lambda}{l} u^{(\Lambda-l)}\, v^{(l)}, \tag{6, 1}$$

worin $u^{(\lambda)}$ im Sinne von [(2, 3), $n = 1$] kurz statt $d^\lambda u/d(x-a)^\lambda$ geschrieben ist. Man findet (6, 1) bei reellen Λ schon in einer älteren Arbeit[6, 2], auf die ich a. a. O.[1, 1] gleichfalls Bezug nahm (S. 248f.), aufgestellt und bewiesen. Vielleicht ist es dem Leser aber willkommen, wenn ihm gleich hier eine kurze Bestätigung dieser Formel geboten wird, was jetzt im Falle $\mathrm{Re}\,\Lambda < 0$ geschehe. Dabei sei vorausgesetzt, daß die rechte Seite ϱ von (6, 1) in einem den Weg von a nach x enthaltenden Gebiete G konvergiere, ferner v sich in einem ebensolchen Gebiete H regulär verhalte; dann wird in dem Durchschnitte D von G und H

$$\varrho = \sum_{l}^{0,\infty} (-1)^l \frac{\Gamma(-\Lambda+l)}{\Gamma(-\Lambda)\,l!} v^{(l)}(x) \frac{1}{\Gamma(-\Lambda+l)} \int_a^x u(\sigma)\,(x-\sigma)^{-\Lambda+l-1}\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\Lambda)} \int_a^x u(\sigma) \Big[\sum_{l}^{0,\infty} \frac{(\sigma-x)^l}{l!} v^{(l)}(x) \Big] (x-\sigma)^{-\Lambda-1}\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\Lambda)} \int_a^x u(\sigma)\,v(\sigma)\,(x-\sigma)^{-\Lambda-1} d\sigma,$$

also wirklich gleich $[u(x)\,v(x)]^{(\Lambda)}$. Die beim zweiten Schritte dieser Rechnung vorgenommene Vertauschung des Summen- und Integralzeichens ist wegen der in D mit Bezug auf σ gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{l}^{0,\infty} (\sigma-x)^l/l!$ zulässig. Beim dritten Schritte nutzt man die Voraussetzung über v aus, nach der sich $v(\sigma)$ in H hinsichtlich des Punktes x in die Taylorsche Reihe entwickeln läßt.

6.1. Ich bringe jetzt Lindners Ergebnis auf eine, wie mir scheint, übersichtlichere und gewohntere Gestalt. Man gehe von (3, 6) aus, nachdem man dort a, b, c durch α, β, γ ersetzt und, wie gestattet, α und β vertauscht hat. Auf diese Form von (3, 6) wende man (6, 1) an, mit $a = 0$,

$$\Lambda = \beta - \gamma,\ \binom{\Lambda}{k} = \frac{(-1)^k\,(\gamma-\beta, k)}{(1, k)}, \tag{6.1, 1}$$

[6, 2] *K. Bochow*, Der Differentialquotient zu beliebigem Index, Doktorschrift, Halle 1885. Siehe dort S. 28/29, (66).

$$u = x^{\beta-1}, u^{(\Lambda-k)} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} \frac{x^{\gamma-1+k}}{(\gamma, k)} \tag{6.1, 2}$$

und dem die Annahme über v in dem Kreise $|x| < 1$ als dem Gebiete H erfüllenden Malteil

$$v = (1-x)^{-\alpha}, \quad v^{(k)} = (\alpha, k)(1-x)^{-\alpha-k}. \tag{6.1, 3}$$

Man erhält dann die Entwicklung

$$\frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}}[x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}] = \\ = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} (1-x)^{-\alpha} \sum_{k}^{0,\infty} \frac{(\alpha, k)(\gamma-\beta, k)}{(\gamma, k)(1, k)} \left(\frac{x}{x-1}\right)^k$$

im Gebiete G $\left(\text{Re } x < \frac{1}{2}\right)$ [6,3], oder — nach der Erklärung der Gaußschen Reihe — zunächst im Gebiete D $\left(|x| < 1, \text{Re } x < \frac{1}{2}\right)$ [6,4]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{x}{x-1}\right). \tag{6.1, 4}$$

Vorerst unter der obiger Herleitung der Formel (6, 1) zu Grunde liegenden Annahme $\text{Re } \beta < \text{Re } \gamma$ bewiesen, bleibt (6.1, 4) nach den Grundsätzen der analytischen Fortsetzung gültig, wenn α, β, γ beliebig gewählt werden, die Werte 0 und negativer ganzer Zahlen für γ ausgenommen.

Lindner [6,1] zielt umgekehrt darauf ab, aus dem bekannten Gestaltswandel (6.1, 4) die Richtigkeit der Leibnizschen Regel (6, 1) zu folgern, während ich hier, von dieser Formel ausgehend, die Kummersche Verwandlung (6.1, 4) neu hergeleitet habe.

Ganz ebenso wie (6.1, 4) findet man

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha; \gamma; \frac{x}{x-1}\right). \tag{6.1, 5}$$

Zu der dritten hierher gehörigen Beziehung

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; x) \tag{6.1, 6}$$

gelangt man, wie kurz erwähnt sei, wenn man auf die hier rechts erscheinende Funktion F die Formel (6.1, 4) anwendet, nachdem man in ihr α, β durch $\gamma-\alpha, \gamma-\beta$ ersetzt hat; dann ergibt sich nämlich

---

[6,3] Vgl. A.-K. [4,2], S. 7.

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; x) = (1-x)^{\alpha-\gamma} F\left(\gamma-\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{x-1}\right),$$

und daraus folgt (6.1, 6) nach (6.1, 5).

Man kann der Gleichung (6.1, 6), indem man F rechts nach (3, 6) als verallgemeinerte Ableitung schreibt, die Gestalt geben

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} [x^{\gamma-\alpha-1}(1-x)^{\beta-\gamma}]; \tag{6.1, 7}$$

dieser Ausdruck der Gaußschen Funktion begegnet, aus einem der F darstellenden Eulerschen Integrale hergeleitet, in der unter [3, 6] angeführten Arbeit von Kampé de Fériet, S. 201. — So wie von (3, 6), kann man auch von (6.1, 7) zu (6.1, 4) übergehen, indem man die in (6.1, 7) rechts auftretende verallgemeinerte Ableitung nach (6,1) umformt und demgemäß $a = 0$, $\Lambda = -\alpha$, $u = x^{\gamma-\alpha-1}$, $v = (1-x)^{\beta-\gamma}$ wählt.

7. Aus den Formeln für die Gaußsche Funktion lassen sich entsprechende für ihre Entartung, *die Kummersche Funktion*

$$\Psi(\alpha; \gamma; x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}; \gamma; \varepsilon x\right) = \sum_{k}^{0,\infty} \frac{(\alpha, k)}{(\gamma, k)(1, k)} x^k, \tag{7, 1}$$

durch den sie erklärenden Grenzübergang gewinnen. Doch ist man auf ihn nicht angewiesen, kann vielmehr manche Eigenschaften dieser Funktion auch bequem durch unmittelbare Rechnung an der in (7, 1) zuletzt stehenden Reihe herleiten, etwa indem man sich, wie hier beabsichtigt, der verallgemeinerten Ableitungen bedient. Um z. B. *das Seitenstück zu* (3, 6) herzustellen, bilde man, von der Reihe

$$x^{\alpha-1} e^x = \sum_{k}^{0,\infty} \frac{1}{k!} x^{\alpha+k-1}$$

ausgehend, nach $[(2, 3), n = 1]$ mit $\xi = \alpha, \varphi = \alpha - \gamma$

$$\frac{d^{\alpha-\gamma}}{dx^{\alpha-\gamma}}(x^{\alpha-1} e^x) = \sum_{k}^{0,\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\gamma+k)} x^{\gamma+k-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} \sum_{k}^{0,\infty} \frac{(\alpha, k)}{(\gamma, k)(1, k)} x^k = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} \Psi(\alpha; \gamma; x). \tag{7, 2}$$

[6, 4] Zur Erweiterung des Spielraums D der Unabhängigen vgl. etwa A.-K. [4, 2] (S. 2, 28—30), oder sonst den Abriß der Lehre von den hypergeometrischen Funktionen in einem Lehrbuche.

Nach [(2, 4), $n = 1$] ist (7, 2) der Integraldarstellung[7,1]

$$\Psi(\alpha;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\, x^{1-\gamma}\, \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^x \sigma^{\alpha-1} e^{\sigma} (x-\sigma)^{\gamma-\alpha-1}\, d\sigma$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1} e^{sx}\, ds,\ \mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$$

gleichwertig, ebenso wie die — hier nicht nochmals verzeichneten — Eulerschen Integralausdrücke der Gaußschen Reihe nach (2, 4) aus (3, 6) und (6.1, 7) entstehen.

7. 1. Zu Kummers *Verwandlungsformel* für seine Funktion $\Psi(\alpha;\gamma;x)$ kann man auf demselben Wege wie in Nr. 6.1 zu (6.1, 4) gelangen. In (6, 1) setze man $a = 0$, $\Lambda = \alpha - \gamma$, $u = x^{\alpha-1}$ und $v = e^x$, so daß man H als einen beliebig großen Kreis um $x = 0$ wählen kann. Nach (6.1, 1), (6.1, 2) ergibt sich dann

$$\frac{d^{\alpha-\gamma}}{dx^{\alpha-\gamma}}\,(x^{\alpha-1}e^x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\, x^{\gamma-1} e^x \sum_k^{0,\infty} \frac{(\gamma-\alpha,k)}{(\gamma,k)\,(1,k)}\,(-x)^k,$$

und G weitet sich zur ganzen Ebene. In ihr wird also nach (7, 2) und (7, 1), wie gewünscht[7.1,1],

$$\Psi(\alpha;\gamma;x) = e^x\,\Psi(\gamma-\alpha;\gamma;-x). \qquad (7.1, 1)$$

8. Ich gehe zu *mehreren* unabhängigen Veränderlichen über. Man kann den *Gestaltswandel der Lauricellaschen Funktionen* dadurch finden, daß man[8,1] in den sie darstellenden Integralen neue Veränderliche einführt. Im folgenden will ich eine der hierher gehörigen Beziehungen *durch verallgemeinertes Ableiten* gewinnen, und zwar die auf F_A (4, 1) bezügliche, in allen Veränderlichen gleichgebaute Formel[8,1]

$$F_A(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_n;\gamma_1,\ldots,\gamma_n;x_1,\ldots,x_n) \qquad (8, 1)$$

$$= (1-X)^{-\alpha} F_A\left(\alpha,\gamma_1-\beta_1,\ldots,\gamma_n-\beta_n;\gamma_1,\ldots,\gamma_n;\frac{x_1}{X-1},\ldots,\frac{x_n}{X-1}\right),$$

in der $$(8, 2)\quad X = \sum_h^{1,n} x_h \qquad \text{ist.}$$

Nach Potenzen der Argumente sind die Funktionen F_A links und rechts entwickelbar, wenn[4,4] um der linken Seite willen $|x_k| < R_k$ ist für k

---

[7,1] Vgl. A.-K. [4,2], S. 122, (7).
[7.1,1] Vgl. A.-K. [4,2], S. 122, (7′).
[8,1] Vgl. A.-K. [4,2], S. 116.

$= 1, \ldots, n$ mit $\sum_h^{1,n} R_h = 1$ [Gebiete H_k aus Nr. 6, wie vorweg bemerkt sei], und um der rechten Seite willen $|x_k|/|X-1| < R_k$ ist [Gebiete G_k aus Nr. 6].

Zur Herleitung von (8, 1) werde ich die verallgemeinerte Leibnizsche Regel benutzen und am Schlusse auf (5, 3) zurückgreifen. (6, 1) liefert beim Ersatz von l durch m_k und mit

$$x = x_k,\ a = 0,\ \Lambda = \beta_k - \gamma_k,\ u = \prod_j^{1,n} x_j^{\beta_j - 1},\ v = (1-X)^{-\alpha}$$

nach (6.1, 1), (6.1, 2), (6.1, 3)

$$\frac{\partial^{\beta_k-\gamma_k}}{\partial x_k^{\beta_k-\gamma_k}}\left[(1-X)^{-\alpha}\prod_j^{1,n} x_j^{\beta_j-1}\right] = \prod_{j\neq k}^{1,n} x_j^{\beta_j-1}$$

$$\cdot \sum_{m_k}^{0,\infty}(-1)^{m_k}\frac{(\gamma_k-\beta_k, m_k)}{(1, m_k)}\frac{\Gamma(\beta_k)}{\Gamma(\gamma_k)(\gamma_k, m_k)}x_k^{\gamma_k+m_k-1}(\alpha, m_k)(1-X)^{-\alpha-m_k};$$

die Malteile $[\Gamma(\beta_k)/\Gamma(\gamma_k)]\, x_k^{\gamma_k-1}\,(1-X)^{-\alpha}$ kann man vor das Zeichen Σ ziehen. Führt man die vorstehende Rechnung der Reihe nach für alle $k = 1, \ldots, n$ aus, so erhält man

$$\frac{\partial^{\sum_k^{1,n}(\beta_k-\gamma_k)}}{\prod_k^{1,n}\partial x_k^{\beta_k-\gamma_k}}\left[(1-X)^{-\alpha}\prod_j^{1,n} x_j^{\beta_j-1}\right] = (1-X)^{-\alpha}\prod_k^{1,n}\frac{\Gamma(\beta_k)}{\Gamma(\gamma_k)}x_k^{\gamma_k-1}$$

$$\cdot \sum_{m_1,\ldots,m_n}^{0,\infty}\frac{(\gamma_1-\beta_1, m_1)\ldots(\gamma_n-\beta_n, m_n)(\alpha, m_1)(\alpha+m_1, m_2)\ldots(\alpha+m_1+\ldots+m_{n-1}, m_n)}{(\gamma_1, m_1)\ldots(\gamma_n, m_n)(1, m_1)\ldots(1, m_n)}$$

$$\cdot x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}(X-1)^{-(m_1+\ldots+m_n)}$$

$$= (1-X)^{-\alpha}\prod_k^{1,n}\frac{\Gamma(\beta_k)}{\Gamma(\gamma_k)}x_k^{\gamma_k-1}$$

$$\cdot F_A\left(\alpha, \gamma_1-\beta_1, \ldots, \gamma_n-\beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n;\ \frac{x_1}{X-1}, \ldots, \frac{x_n}{X-1}\right)$$

nach der Erklärung (4, 1) der Funktion F_A. Der Vergleich mit (5, 3) führt in der Tat zu (8, 1).

9. Ich beschränke mich weiterhin auf *zwei* Veränderliche, die x, y statt x_1, x_2 heißen mögen. F_A ist dann *Appells Funktion* F_2, und (8,1), (8, 2) lauten jetzt

$$F_2(\alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = (1 - x - y)^{-\alpha}$$

$$\cdot F_2\left(\alpha, \gamma_1 - \beta_1, \gamma_2 - \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right). \qquad (9,1)$$

Zu dieser auf beide Veränderliche in gleicher Weise einwirkenden Verwandlung der Funktion F_2 tritt noch — auf zweierlei Art — eine gewisse einseitige Umgestaltung

$$F_2(\alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = (1-x)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma_1 - \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}\right), \qquad (9, 2)$$

$$F_2(\alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = (1-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \beta_1, \gamma_2 - \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right). \qquad (9, 3)$$

Diese Formelgruppe findet man auf S. 24f. des Werkes[4, 2] von Appell und Kampé de Fériet so hergeleitet, daß man zunächst (9, 3) gewinnt, indem man die linke Seite nach Potenzen von x entwickelt und auf die dabei als Vorzahlen erscheinenden Gaußschen Funktionen nach passender Umbenennung der Veränderlichen und der Parameter den Wandel (6.1, 4) ausübt. Mit (9, 3) gilt (9, 2), und beide verbunden führen zu (9, 1). — Die Gebiete, in denen sich die in diesen Formeln auftretenden Appellschen Funktionen nach Potenzen ihrer Argumente entwickeln lassen, findet man a. a. O.[4, 2], S. 32 verzeichnet.[6, 4]

Ich werde hier durch entsprechende Schlüsse auf umgekehrtem Wege aus (9, 1) die Beziehung (9, 3) folgern. Nach [(4, 1), $n = 2$] ist

$$F_2\left(\alpha, \gamma_1 - \beta_1, \gamma_2 - \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right)$$

$$= \sum_m^{0,\infty} \frac{(\alpha, m)(\gamma_1 - \beta_1, m)}{(\gamma_1, m)(1, m)} \left(\frac{x}{x+y-1}\right)^m \sum_n^{0,\infty} \frac{(\alpha+m, n)(\gamma_2 - \beta_2, n)}{(\gamma_2, n)(1, n)} \left(\frac{y}{x+y-1}\right)^n$$

$$= \sum_m^{0,\infty} \frac{(\alpha, m)(\gamma_1 - \beta_1, m)}{(\gamma_1, m)(1, m)} \left(\frac{x}{x+y-1}\right)^m F\left(\alpha + m, \gamma_2 - \beta_2; \gamma_2; \frac{y}{x+y-1}\right).$$

Man entnimmt aber aus (6.1, 4), daß

$$F\left(\alpha+m, \gamma_2 - \beta_2; \gamma_2; \frac{y}{x+y-1}\right) = \left(\frac{x-1}{x+y-1}\right)^{-\alpha-m} F\left(\alpha+m, \beta_2; \gamma_2; \frac{y}{1-x}\right)$$

ist; also wird

$$(1-x-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma_1-\beta_1, \gamma_2-\beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right)$$

$$= (1-x)^{-\alpha} \sum_{m}^{0,\infty} \frac{(\alpha, m)(\gamma_1-\beta_1, m)}{(\gamma_1, m)(1, m)} \left(\frac{x}{x-1}\right)^m F\left(\alpha+m, \beta_2; \gamma_2; \frac{y}{1-x}\right)$$

$$= (1-x)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma_1-\beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}\right),$$

da ja der mittlere Ausdruck bis auf den Malteil $(1-x)^{-\alpha}$ die — schon am Anfang dieses Absatzes benutzte — Entwicklung der Funktion F_2 nach Potenzen des ersten Argumentes [hier $x/(x-1)$] vorstellt. Aus der Gleichheit des ersten und dritten Bestandteils der letzten Formelgruppe und aus (9, 1) folgt (9, 3).

Wie F_2 drei, so besitzt F_A (4, 1) im ganzen $2^n - 1$ Formen des Gestaltswandels [8, 1], von denen ich hier nur die eine (8, 1) hergeleitet habe; die übrigen würden sich aus (8, 1) auf ähnliche Art gewinnen lassen, wie ich soeben (9, 3) aus (9, 1) gefolgert habe. Ich sehe davon ab, dies näher auszuführen.

Zum räumlichen Rückwärtseinschneiden.

Von
H. Schaller, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 4. Oktober 1948.)

Die Aufgabe, ein gegebenes Dreikant $S\,(u, v, w)$ nach einem gegebenen Dreieck ABC zu schneiden (räumliches Rückwärtseinschneiden), ist vielfach auf konstruktivem Wege behandelt worden[1]. Wird das Dreikant etwa längs w aufgeschnitten und verebnet, so entsteht die planimetrische Aufgabe, auf vier durch den Punkt S gehenden Geraden $w, u, v, \overline{w}$ vier Punkte $C, A, B, \overline{C}$ zu finden, so daß

$$AC = b \tag{1}$$

$$AB = c \tag{2}$$

$$B\overline{C} = a \tag{3}$$

$$SC = S\overline{C} \tag{4}$$

wobei a, b, c die Seiten des gegebenen Dreiecks sind.

Diese planimetrische Aufgabe haben u. a. *S. Finsterwalder*[2] und *K. Fuchs*[3] näherungsweise gelöst. Ein exakter Lösungsweg soll hier angegeben werden.

Hält man die Punkte A, B fest, so muß S wegen des festen Winkels $\gamma = uv$ auf einem Kreise s durch A und B wandern ($S_1, S_2, \ldots, S_i$) (Abbildung). Dabei beschreibt

---

[1] *A. Grunert*, Arch. d. Math., 1. Teil (1841); *W. Marx*, München (1880); *E. Salfner*, Arch. d. Math., 16. Teil (1898); *R. Suppantschitsch*, Jahresber. d. Realschule Prag-Neustadt (1904); *H. Böheim*, Zeitschr. f. Realschulwesen, 39. Jg. (1914)); *P. Werkmeister*, Archiv f. Photogrammetrie, 5. Bd. (1915); *A. Klingatsch*, Archiv f. Photogrammetrie, Bd. 5 (1915); *Th. Schmid*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, II. Bd., §§ 32 und 56.

[2] *S. Finsterwalder*, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 6 (1899).

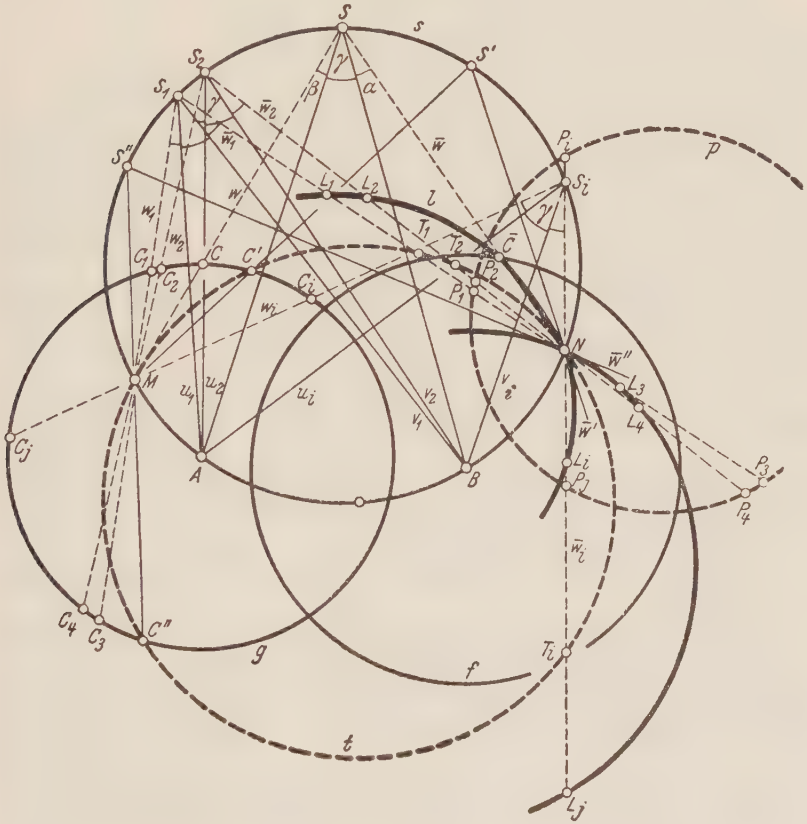
[3] *K. Fuchs*, Zeitschrift für Verm., 35 (1906).

u das Strahlenbüschel A $(u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_i)$,
v das Strahlenbüschel B $(v_1, v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_i)$,

und wegen der beiden festen Winkel $\beta = wu$, $\alpha = v\bar{w}$

w das Strahlenbüschel M $(w_1, w_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots w_i)$,
$\bar{w}$ das Strahlenbüschel N $(\bar{w}_1, \bar{w}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots w_i)$,

wobei auch die Zentren M und N der beiden letztgenannten Büschel auf dem Kreise s liegen.



Wegen der Bedingungen (1) und (3) muß C auf einem Kreise g mit dem Radius b und dem Mittelpunkt A, und $\bar{C}$ auf einem Kreise f mit dem Radius a und dem Mittelpunkte B liegen.

Um nun auch die Bedingung (4) zu erfüllen, trägt man die Abstände $S_1 C_1$, $S_2 C_2$ ..... $S_i C_i$ von den Punkten S_1, S_2, ... S_i aus auf

den Strahlen $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ ..... $\overline{w}_i$ des Büschels N auf. Man erhält so die Punkte L_1, L_2 ..... L_i ,die die Kurve l erfüllen.

Diese ist neben dem Kreise f ein weiterer Ort für $\overline{C}$. Der Punkt $\overline{C}$ wird also als Schnittpunkt von l mit f gefunden. Der durch ihn gehende Strahl $\overline{w}$ des Büschels N liefert auf dem Kreise s den Punkt S. Der durch S gehende Strahl w des Büschels M liefert auf dem Kreise g den Punkt C, womit eine den Bedingungen (1), (2), (3), (4) entsprechende Figur $AB\overline{C}SC$ gefunden ist.

Nun soll noch gezeigt werden, *daß l eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung mit dem reellen Doppelpunkt N ist.* Zu diesem Zwecke werden auf den Strahlen $\overline{w}_i$ des Büschels N nicht nur (wie oben) die Abstände $S_i C_i$, sondern auch die Abstände $S_i M$ von S_i aus aufgetragen. So entstehen die Punkte T_i, die den Kreis t erfüllen. Dieser geht durch M und N, sein Mittelpunkt liegt auf s und ist der Halbierungspunkt des Bogens MN. Nun kann man zu den Punkten L_i von l auch gelangen, indem man von den Punkten T_i des Kreises t aus auf den Strahlen $\overline{w}_i$ des Büschels N die Abstände MC_i aufträgt.

Noch sinnfälliger wird dies, wenn man die Abstände MC_i zuerst auf den Strahlen $\overline{w}_i$ von N aus aufträgt. Natürlich entsteht so ein zu g kongruenter Kreis p mit den Punkten P_i.

Die Kurve l entsteht endlich durch Addition der Abstände NT_i, NP_i, die von den beiden Kreisen t und p auf den Strahlen $\overline{w}_i$ des Büschels N abgeschnitten werden, wobei der eine Kreis (nämlich t) durch das Zentrum N des Büschels hindurchgeht. Damit sind die oben behaupteten Eigenschaften der Kurve l bewiesen.

Die Frage nach den Tangenten an l im reellen Doppelpunkt N löst der Kreis t.

Ermittelt man nämlich zu den Schnittpunkten C', C'' der Kreise g und t die entsprechenden Punkte von l, so fallen diese mit N zusammen. Davon überzeugt man sich, wenn man bedenkt, daß durch Auftragen der Abstände $S_i N$ von S_i aus auf den Strahlen w_i des Büschels M gleichfalls der Kreis t entsteht. Die den beiden Punkten C', C'' entsprechenden Strahlen $\overline{w}'$, $\overline{w}''$ des Büschels N sind die gesuchten Doppelpunktstangenten.

Es sei noch erwähnt, daß die Aufgabe durch eine Inversion mit dem Zentrum N auf die Ermittlung der Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitt führt.

Beschränkte Integrale auf speziellen transcendenten Riemannschen Flächen.

Von
Hans Hornich, Graz.

(Eingelangt am 12. Oktober 1948.)

Für die zweiblättrigen *Riemann*schen Flächen F mit unendlichvielen, sich nur im Unendlichen häufenden reellen Verzweigungspunkten habe ich vor längerer Zeit die Integrale erster Gattung als im Endlichen überall reguläre Integrale mit beschränktem Realteil auf der zerschnittenen Fläche F definiert und solche Integrale auch konstruiert. *Myrberg* hat auf derselben Klasse von Flächen und mit derselben Definition die Theorie weiterentwickelt. *Nevanlinna* hat andererseits auf gewissen *Riemann*schen Flächen als Integrale erster Gattung solche mit endlichem Dirichletschem Integral definiert; die auf F definierten Integrale mit beschränktem Realteil haben i. a. kein endliches Dirichletsches Integral.

In dieser Arbeit werden auf den Flächen F die sämtlichen Integrale aufgestellt, die auf der zerschnittenen Fläche *beschränkt* sind, also nach unserer Definition a fortiori Integrale erster Gattung sind. Die Aufstellung aller beschränkten Integrale auf einer transcendenten *Riemann*schen Fläche ist bisher noch nicht unternommen worden. Mit den Integralen erster Gattung ergeben sich einfache Beziehungen. Auch für die beschränkten Integrale ist das *Dirichlet*sche Integral keineswegs stets endlich, so daß die *Nevanlinna*sche Theorie hier nicht anwendbar ist.

Im Gegensatz zu den früheren Arbeiten wird F nicht als Grenzfall von hyperelliptischen Gebilden betrachtet, sondern stets nur auf F operiert.

I.

Sei F eine zweiblättrige *Riemann*sche Fläche mit den unendlichvielen reellen Verzweigungspunkten $a_0, a_1, a_2, \ldots$, wobei für alle n

$$0 < \alpha_n < \alpha_{n+1} \text{ und}$$
$$\alpha_n \longrightarrow +\infty \text{ gelte.}$$

Wir bezeichnen die Intervalle der reellen Achse ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$a_n = [\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}]$$
$$b_n = [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}],$$

wobei $b_0 = (-\infty, \alpha_0]$ genommen werde.

Ferner seien β_n beliebige Punkte auf a_n:

$$\alpha_{2n} \leqq \beta_n \leqq \alpha_{2n+1}.$$

Wir setzen:

$$f_n(z) = \frac{\alpha_{2n}\,\alpha_{2n+1}}{\beta_n^2} \frac{z-\beta_n}{z-\alpha_{2n}} \frac{z-\beta_n}{z-\alpha_{2n+1}}.$$

Dann ist das Produkt

$$f(z) = \prod_0^\infty f_n(z)$$

auf jedem beschränkten abgeschlossenen Bereich B, der keine Punkte α_n enthält, absolut und gleichmäßig konvergent.

Denn es ist

$$\frac{\alpha_{2n}}{\beta_n} \frac{z-\beta_n}{z-\alpha_{2n}} = 1 + z \frac{\alpha_{2n}-\beta_n}{\beta_n (z-\alpha_{2n})}$$

und die Summe

$$\sum_n z \frac{\alpha_{2n}-\beta_n}{\beta_n (z-\alpha_{2n})} = \sum_n \left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_{2n}}\right) \frac{z\,\alpha_{2n}}{z-\alpha_{2n}}$$

auf B absolut und gleichmäßig konvergent: die Summe $\sum_n \left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_{2n}}\right)$ konvergiert ja absolut und $\frac{z\,\alpha_{2n}}{z-\alpha_{2n}}$ ist gleichmäßig auf B für alle n beschränkt. Eine analoge Überlegung gilt für die Faktoren $\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_n} \frac{z-\beta_n}{z-\alpha_{2n+1}}$.

Es ist also $f(z)$ eine meromorphe Funktion, die nur an den Stellen α_n einfache Pole hat. F ist die *Riemann*sche Fläche von $\sqrt{f(z)}$. Wir denken uns F längs der reellen Achse von α_0 bis $+\infty$ aufgeschnitten und nennen die so entstandene Fläche $\overline{F}$.

Für zwei beliebige verschiedene Indices $i,\ k \geqq 0$ ist das Integral

$$u_{ik} = \int_{\alpha_0}^{z} \frac{\sqrt{f(z)}\,dz}{(z-\beta_i)(z-\beta_k)}$$

auf F überall regulär. (Ersichtlich enthält u_{ik} die β_i und β_k nur als konstante Faktoren.)

Wir machen über die α_n folgende Voraussetzung:

Es existiert eine reelle Zahl $p > 1$ und eine Folge positiver Zahlen $q_n \longrightarrow 0$, so daß für alle n gilt

$$\alpha_{2n+1} \leqq p\,\alpha_{2n} \text{ und} \tag{V_1}$$

$$\alpha_{2n+2} \geqq \alpha_{2n+1} + \exp\left(-q_n\sqrt{\alpha_{2n+1}}\right). \tag{V_2}$$

und zeigen:

Unter diesen Voraussetzungen ist die u_{ik} auf $\overline{F}$ beschränkt.

Der Beweis erfordert mehrere Fallunterscheidungen.

Sei z zunächst beliebig. Wir bestimmen den kleinsten Index N, so daß

$$\alpha_{2N+2} \geqq 2\,|\,z\,|.$$

Es ist also $\alpha_{2N} < 2\,|\,z\,|$. Dann ist für $n > N$

$$|\,z - \alpha_{2n}\,| \geqq \alpha_{2n} - |\,z\,| \geqq \frac{1}{2}\,\alpha_{2n} \text{ und ebenso}$$

$$|\,z - \alpha_{2n+1}\,| \geqq \frac{1}{2}\,\alpha_{2n+1}.$$

Ferner ist nach V_1

$$\alpha_{2N+1} \leqq p\,\alpha_{2N} < 2\,p\,|\,z\,|.$$

Wir spalten das Produkt

$$\prod_0^\infty f_n(z) = \prod_0^N \cdot \prod_{N+1}^\infty$$

und betrachten zunächst das unendliche Produkt. Es ist

$$\sum_{n>N} \left| z\,\frac{\beta_n - \alpha_{2n}}{\beta_n\,(z-\alpha_{2n})} \right| \leqq 2\,|\,z\,| \sum_{n>N} \frac{\beta_n - \alpha_{2n}}{\beta_n\,\alpha_{2n}}$$

$$\leqq \alpha_{2N+2}\left(\frac{1}{\alpha_{2N+2}} - \frac{1}{\beta_{N+1}} + \frac{1}{\alpha_{2N+4}} - \ldots\right) < 1.$$

Ebenso ist

$$\sum_{n>N} \left| z\,\frac{\alpha_{2n+1} - \beta_n}{\beta_n\,(z-\alpha_{2n+1})} \right| \leqq \alpha_{2N+2}\left(\frac{1}{\beta_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{2N+3}} + \frac{1}{\beta_{n+2}} - \ldots\right) < 1.$$

Also ist

$$\left| \prod_{n>N} \frac{\alpha_{2n}}{\beta_n}\,\frac{z-\beta_n}{z-\alpha_{2n}} \right| \leqq \exp. \sum_{n>N} \left| z\,\frac{\beta_n - \alpha_{2n}}{\beta_n\,(z-\alpha_{2n})} \right| < e;$$

ebenso für die analog gebauten zweiten Faktoren von $f_n(z)$, so daß allgemein

$$\left| \prod_{n>N} f_n(z) \right| < e^2.$$

Für das restliche endliche Produkt ist zunächst

$$\prod_0^N \frac{\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}}{\beta_n^2} \leqq \prod_0^N \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n}} \leqq \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \prod_1^N \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n}} \cdot \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{2n-1}} = \frac{\alpha_{2N+1}}{\alpha_0} \leqq \frac{2p}{\alpha_0} \mid z \mid.$$

Erstens sei $\Re z = x \leqq 0$. Dann ist

$$\left| \frac{z-\beta_0}{z-\alpha_0} \cdot \frac{z-\beta_1}{z-\alpha_2} \cdots \frac{z-\beta_N}{z-\alpha_{2n}} \right| \leqq \left| \frac{z-\beta_N}{z-\alpha_0} \right| \leqq \left| \frac{z-\alpha_{2N+1}}{z-\alpha_0} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{(2p+1)\,|z|}{|z-\alpha_0|} \leqq 2p+1$$

und

$$\left| \frac{z-\beta_0}{z-\alpha_1} \cdot \frac{z-\beta_1}{z-\alpha_3} \cdots \frac{z-\beta_N}{z-\alpha_{2N+1}} \right| \leqq 1.$$

Also ist $|f(z)| \leqq e^2 \frac{2p(2p+1)}{\alpha_0} |z| = C|z|$ und

$$\left| \frac{du_{ik}}{dz} \right| \leqq \frac{\sqrt{|z|} \cdot \sqrt{C}}{|z-\beta_i|\,|z-\beta_k|},$$

woraus die Beschränktheit von u_{i_k} für $x \leqq 0$ sofort folgt.

Zweitens verfolgen wir z längs einer Gerade

$$\arg z = \gamma \quad \text{mit } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

(Für $0 > \gamma > -\frac{\pi}{2}$ ist die Rechnung natürlich analog.) Sei etwa $\Re z = x$ auf dem Intervall b_{l+1} gelegen, also

$$\alpha_{2l+1} \leqq x \leqq \alpha_{2l+2}.$$

Wir spalten das Produkt

$$\prod_0^N \frac{z-\beta_n}{z-\alpha_{2n}} = \prod_{n \leqq l} \cdot \prod_{l+1}^N$$

Für $n \leqq l$ ist $|z-\beta_n| \leqq |z-\alpha_{2n}|$, daher

$$\left| \prod_{n \leqq l} \right| \leqq 1.$$

Ferner ist

$$\left| \prod_{l+1}^{N} \right| = \left| \frac{z-\beta_{l+1}}{z-\alpha_{2l+2}} \cdot \frac{z-\beta_{l+2}}{z-\alpha_{2l+4}} \cdots \frac{z-\beta_N}{z-\alpha_{2N}} \right| \leqq \left| \frac{z-\beta_N}{z-\alpha_{2l+2}} \right| \leqq$$

$$\left| \frac{z-\alpha_{2N+1}}{z-\alpha_{2l+2}} \right| \leqq \frac{(2p+1)|z|}{|z-\alpha_{2l+2}|}$$

Analog spalten wir:

$$\prod_{0}^{N} \frac{z-\beta_n}{z-\alpha_{2n+1}} = \prod_{n \leqq l} \cdot \prod_{l+1}^{N};$$

für $n > l$ ist $|z-\beta_n| \leqq |z-\alpha_{2n+1}|$, also

$$\left| \prod_{l+1}^{N} \right| \leqq 1.$$

Andererseits ist

$$\left| \prod_{n \leqq l} \right| = \left| \frac{z-\beta_0}{z-\alpha_1} \cdot \frac{z-\beta_1}{z-\alpha_3} \cdots \frac{z-\beta_l}{z-\alpha_{2l+1}} \right| \leqq \left| \frac{z-\beta_0}{z-\alpha_{2l+1}} \right|$$

Also ist

$$|f(z)| \leqq e^2 \frac{2p}{\alpha_0} |z| \frac{(2p+1)|z|}{|z-\alpha_{2l+2}|} \cdot \frac{|z-\beta_0|}{|z-\alpha_{2l+1}|}.$$

Nun ist für alle Punkte unserer Gerade und jedes n $|z-\alpha_n| \geqq |z| \sin\gamma$; also ist weiter

$$|f(z)| \leqq e^2 \frac{2p(2p+1)|z-\beta_0|}{\alpha_0 \sin^2\gamma}$$

und

$$\left| \frac{du_{ik}}{dz} \right| \leqq e \sqrt{\frac{2p(2p+1)}{\alpha_0}} \frac{\sqrt{|z-\beta_0|}}{|z-\beta_i||z-\beta_k|} \frac{1}{\sin\gamma}$$

Dieselbe Abschätzung gilt, wenn x in ein a-Intervall der reellen Achse fällt. Daraus folgt sofort, daß u_{ik} auf jeder Geraden $\arg z = \gamma$ mit $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist; weiter folgt in Zusammenhang mit dem ersten Ergebnis: das Integral u_{ik} ist für jedes c mit $0 < c < \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig beschränkt im Winkelraum

$$c \leqq \arg z \leqq 2\pi - c.$$

Drittens untersuchen wir jetzt den Winkelraum

$$-c \leqq \arg z \leqq +c$$

Da für $\arg z = \pm c$ das Integral u_{ik} beschränkt ist, zeigen wir, daß das Integral

$$\int \left| \frac{du_{ik}}{dz} \right| d\,y$$

längs einer Gerade $x = \text{const.}$ von $y = x \operatorname{tg} c$ bis $y = 0$ genommen, unabhängig von x beschränkt bleibt. Wir nehmen zunächst eine Gerade $x = \text{const.}$ durch das Intervall b_{l+1}, also

$$\alpha_{2l+1} \leqq x \leqq \alpha_{2l+2}$$

und können die im zweiten Fall gemachten Abschätzungen verwenden: es ist für nichtreelle z auf dieser Gerade

$$|f(z)| \leqq e^2 \frac{2p(2p+1)}{\alpha_0} \frac{|z|^2 |z-\beta_0|}{|z-\alpha_{2l+1}|\,|z-\alpha_{2l+2}|}$$

Wir suchen bei festem $y > 0$ das Minimum von $|z-\alpha_{2l+1}|\,|z-\alpha_{2l+2}|$; sei kurz $\alpha_{2l+2} - \alpha_{2l+1} = 2d_l$ und beziehen wir x für den Augenblick auf den Mittelpunkt des Intervalls b_{l+1}, so suchen wir also das Minimum von

$$h(x) = (y^2 + (x-d_l)^2)(y^2 + (x+d_l)^2)$$

Es ist $h'(x) = 4x(y^2 + x^2 - d_l^2)$. Ist nun $y < d_l$, so hat $h(x)$ für $x = \pm\sqrt{d_l^2 - y^2}$ Minima, und zwar ist dann $h = 4d_l^2 y^2$. Ist $y \geqq d_l$, so hat $h(x)$ für $x = 0$ ein Minimum, und zwar ist dann $h = (y^2 + d_l^2)^2$.

Es ist also im Streifen $\alpha_{2l+1} \leqq x \leqq \alpha_{2l+2}$ die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{|z-\alpha_{2l+1}|\,|z-\alpha_{2l+2}|}}$$

für $0 < y \leqq \dfrac{\alpha_{2l+2} - \alpha_{2l+1}}{2} = d_l$ absolut $\leqq \dfrac{1}{\sqrt{2d_l y}}$

für $y > d_l$ absolut $\leqq \dfrac{1}{\sqrt{d_l^2 + y^2}}$.

Nun ist in diesem Streifen, wenn man den restlichen Faktor in $\dfrac{du_{ik}}{dz}$ nach $\dfrac{1}{z}$ entwickelt und abschätzt, für hinreichend große x, bzw. l, bei einer geeigneten Konstante K

$$\left| \frac{du_{ik}}{dz} \right| \leqq K \frac{|z|^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{|z-\alpha_{2l+1}|\,|z-\alpha_{2l+2}|}};$$

integriert man bei festem x von $y = 0$ bis $y = x \operatorname{tg} c$, so ist das Integral absolut

$$\leqq K \int_0^{d_l} \frac{dy}{\sqrt{|z|} \cdot \sqrt{2\, d_l\, y}} + K \int_{d_l}^{x \operatorname{tg} c} \frac{dy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}\sqrt{d_l^2+y^2}}.$$

Das erste Integral ist $< K \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{2}$. Das zweite Integral ist

$$< K \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{d_l}^{x \operatorname{tg} c} \frac{dy}{\sqrt{d_l^2+y^2}} < \frac{K}{\sqrt{x}} \lg\left(1 + \frac{2\, x \operatorname{tg} c}{d_l}\right).$$

Ist $\frac{2\, x \operatorname{tg} c}{d_l} \leqq 1$, so ist der Ausdruck $\leqq \frac{K}{\sqrt{x}} \ln 2$. Ist $\frac{2\, x \operatorname{tg} c}{d_l} > 1$, so ist das Integral $\leqq \frac{K}{\sqrt{x}} \lg \frac{4\, x \operatorname{tg} c}{d_l}$. Es kommt also auf die Größe $\frac{1}{\sqrt{x}} \lg \frac{x}{d_l}$ in dem Streifen $\alpha_{2l+1} \leqq x \leqq \alpha_{2l+2}$ an. Nun strebt $\frac{1}{\sqrt{x}} \lg x \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow +\infty$ und es ist

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \lg \frac{1}{2d_l} \leqq \frac{1}{\sqrt{\alpha_{2l+1}}} \lg \frac{1}{\alpha_{2l+2} - \alpha_{2l+1}}$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist nach V_2 aber $\leqq q_l$, strebt also ebenfalls für $l \longrightarrow \infty$ gegen Null.

Diese Abschätzungen für unser Integral übertragen sich ohneweiters auch auf den Fall, daß x einem Intervall a_l angehört, und zwar wieder mit derselben Voraussetzung V_2. — Damit ist die Beschränktheit von u_{ik} auf $\overline{F}$ nachgewiesen.

Eine einfache Analyse des Beweises liefert das weitere Resultat: *Das Integral*

$$\int \left|\frac{du_{ik}}{dz}\right| |dz|$$

erstreckt über einen Kreis $|z| = R$ *strebt für* $R \longrightarrow +\infty$ *gegen Null.*

In welchem Blatt von F wir dabei operieren, ist natürlich gleichgültig. Daraus folgt, daß für die reelle Achse als den Rand der oberen oder der unteren Halbebene eines der beiden Blätter gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_{ik}}{dz}\, dz = 0,$$

d. h. für die betreffende Halbebene ist $u_{ik}(+\infty) = u_{ik}(-\infty)$: das Unendliche dieser Halbebenen wird auf einen Punkt abgebildet.

II.

Im folgenden denken wir uns die beiden Blätter von F stets längs der a-Intervalle verbunden und eines der Blätter als oberes oder erstes erklärt. In diesem Blatt ziehen wir um jedes Intervall a_n einen Querschnitt A_n; ferner legen wir um jedes Intervall b_n einen Querschnitt B_n so, daß der der oberen Halbebene angehörige Teil von B_n auf dem ersten Blatt liegt.

Bei den Integralen u_{ik} sind die β_n innerhalb der a_n frei zu wählen. Diese Willkür können wir zur Bildung von beschränkten Normalintegralen benutzen.

Wir können in dem Integral

$$v_{ik} = \int_{a_*}^{z} \frac{c_{ik}\sqrt{f(z)}}{(z-\beta_i)(z-\beta_k)}\, dz \quad (i \neq k,\ i, k \geqq 0)$$

die Konstante c_{ik}, sowie die β_n mit $\alpha_{2n} \leqq \beta_n \leqq \alpha_{2n+1}$ so wählen, daß für die Perioden über die A_n gilt:

$$P_{ik,n} = \int_{A_n} d\, v_{ik} = 2\int_{\alpha_{2n}}^{\alpha_{2n+1}} d\, v_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ für } n = i \\ -1 \text{ für } n = k \\ 0 \text{ für } n \neq i, k. \end{cases}$$

$f(z)$ ist an den b-Intervallen der reellen Achse reell positiv, an den a-Intervallen negativ, daher $\sqrt{f(z)}$ an den b-Intervallen reell, an den a-Intervallen rein imaginär. Dabei ändert $\sqrt{f(z)}$ im Innern von a_n $(n \neq i, k)$ an der Stelle β_n das Vorzeichen, wenn β_n nicht an einem Endpunkt liegt. Im Innern von a_i und a_k hat $\dfrac{d\, v_{ik}}{dz}$ konstantes Argument, also ist $P_{ik,i} \neq 0$, ebenso $P_{ik,k} \neq 0$. Sollen also diese Größen reell sein, so muß c_{ik} jedenfalls rein imaginär gewählt werden.

Sei $l \neq i, k$; hält man alle β_n mit Ausnahme von β_l fest und läßt β_l von α_{2l} bis α_{2l+1} variieren, so wird

$$P_{ik,l} = 2\int_{\alpha_{2l}}^{\alpha_{2l+1}} \frac{c_{ik}}{(z-\beta_i)(z-\beta_k)} \frac{z-\beta_l}{\beta_l} \sqrt{\prod_{n \neq l} f_n(z)}\, \frac{\sqrt{\alpha_{2l}\alpha_{2l+1}}\, dz}{\sqrt{(z-\alpha_{2l})(z-\alpha_{2l+1})}}$$

für $\beta_l = \alpha_{2l}$ das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie für $\beta_l = \alpha_{2l+1}$ und es gibt genau eine Zahl β_l in a_l, für welche $P_{ik,\,l} = 0$ wird.

Die Iteration dieses Vorgangs liefert die Konstruktion der gesuchten β-Werte: wir gehen von beliebigen Anfangswerten $\beta^0{}_n$ aus $(n \neq i, k)$ und bestimmen zunächst β_0 bei festgehaltenen andern β_n so, daß $P_{ik,\,0} = 0$; sodann nach demselben Vorgang die Größe β_1 so, daß $P_{ik,\,1} = 0$; so dann wieder die Größe β_0 so, daß $P_{ik,\,0} = 0$ wird usw. der Reihe nach die Größen

$$\beta_0\,\beta_1\,\beta_0\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_0\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_0\,\ldots$$

Wir erhalten so eine unendliche Doppelfolge von β^j_n für $n \neq i, k$, so daß die $j+1$-te Folge der β_n nur in einem β-Glied sich von der vorangegangenen j-ten Folge unterscheidet. Für jedes n hat die Folge der β^j_n mindestens einen Häufungspunkt in a_n; in bekannter Weise können wir dann eine ausgezeichnete Teilfolge j_r der j angeben, so daß für diese Teilfolge alle $\beta^{j_r}_n$ konvergieren

$$\lim_r \beta^{j_r}_n = \beta_n \quad (n \neq i, k)$$

Für das mit diesen β_n gebildete Integral v_{ik} gilt dann $P_{ik,\,n} = 0$ mit $n \neq i, k$. Die Größe c_{ik} ist dann so zu bestimmen, daß $P_{ik,\,i} = 1$ wird; wie schon erwähnt, ist c_{ik} rein imaginär. Weil ferner $\int_{-\infty}^{+\infty} dv_{ik} = 0$ und an den b-Intervallen der reellen Achse der Integrand rein imaginär ist, gilt damit von selbst auch $P_{ik,\,k} = -1$.

Wie wir sofort sehen werden, sind die beschränkten Normalintegrale durch ihre Perioden über die Querschnitte A_n bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt; dies vorweggenommen, haben wir ersichtlich folgende einfache Relationen zwischen den v_{ik}:

$$\frac{dv_{ik}}{dz} = -\frac{dv_{ki}}{dz} \quad (i \neq k)$$

$$\frac{dv_{ik}}{dz} + \frac{dv_{kl}}{dz} + \frac{dv_{li}}{dz} = 0 \quad (i \neq k \neq l \neq i)$$

so daß etwa alle v_{ik} linear durch die v_{0k} sich darstellen lassen.

Es gilt nun allgemein:

Eine auf F reguläre, eindeutige und beschränkte Potentialfunktion h ist notwendig konstant.

Bezeichnet man mit $\bar{z}$ den zu z konjugiert komplexen Punkt desselben Blattes, so ist $h(z) - h(\bar{z}) = h_1$ auf F gleichfalls regulär, eindeutig und

beschränkt und für die b-Intervalle der reellen Achse ist $h_1 = 0$. Nun hängt die obere Halbebene des ersten Blattes mit der unteren Halbebene des zweiten Blattes längs der a-Intervalle zusammen: diese beiden Halbebenen geben also zusammen eine Schlitzebene σ, deren Schlitze die b-Intervalle sind. Auf σ ist h_1 eine beschränkte Potentialfunktion, deren Randwerte an den Schlitzen $= 0$ sind; also ist $h_1 = 0$ und $h(z) = h(\bar{z})$ auf F.

Andererseits ist wegen $h(z) = h(\bar{z})$ an den b-Intervallen $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$, also auf σ h eine beschränkte Potentialfunktion, deren Normalableitungen an den Schlitzen $= 0$ ist, also $h = \text{const}$.

Ein auf F reguläres und beschränktes Integral u, dessen Perioden über die A-Querschnitte $\int_{A_n} du = 0$ sind, ist notwendig konstant.

Es ist $\Re[u(z) - u(\bar{z})] = h$ auf F regulär, beschränkt und eindeutig: nach Voraussetzung ist $\int_{A_n} dh = 0$ und weiter ist $\dfrac{\partial u(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\bar{z})}{\partial x}$ an den b-Intervallen, also auch $\int_{B_n} dh = 0$. Daher ist nach dem obigen h konstant; dasselbe gilt für $\Im[u(z) - u(\bar{z})]$, so daß überhaupt $u(z) = u(\bar{z}) + \text{const.}$ gilt: dann ist aber $u(z)$ als analytische Funktion konstant.

Eine auf $\overline{F}$ beschränkte Potentialfunktion ist daher — wie bei den algebraischen Flächen — durch ihre Perioden über die A- und B-Querschnitte, ein beschränktes Integral durch die Perioden über die A-Querschnitte bis auf additive Konstante festgelegt.

Wir betrachten nun die rein imaginären Perioden der v_{ik}, und zwar speziell

$$\int_{B_i} dv_{k-1,\,k} = 2 \int_{b_i} dv_{k-1,\,k} = a_{ik} \quad (k \geqq 1).$$

Sei nun für $i \neq k$, $i, k \geqq 1$

$$\Re\, v_{i-1,\,i} = u_1 \text{ und } \Re\, v_{k-1,\,k} = u_2,$$

so ist nach unserer Bemerkung am Ende von I

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) dx = 0,$$

wobei das Integral etwa über den Rand der oberen Halbebene des ersten

Blattes erstreckt sei. Nun ist $\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$ an den a-Intervallen und weiter

$$u_1 = \tfrac{1}{2}\,\delta_{i\,n} \text{ an den Intervallen } b_n$$
$$u_2 = \tfrac{1}{2}\,\delta_{k\,n} \text{ an den Intervallen } b_n.$$

Also ist unser Integral

$$= \tfrac{1}{2} \int_{b_i} \frac{\partial u_2}{\partial y}\, dx - \tfrac{1}{2} \int_{b_k} \frac{\partial u_1}{\partial y}\, dx = -\tfrac{1}{4}\,(a_{ik} - a_{ki}) = 0:$$

Die imaginären Perioden a_{ik} sind symmetrisch

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k \geqq 1).$$

Wegen der Beschränktheit von $v_{k-1,\,k}$ sind ferner *die Partialsummen*

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ik} = 2 \sum_{i=1}^{N} \int_{b_i} d\,v_{k-1,\,k} = 2\,\Im \int_{\alpha_0}^{\alpha_{2N}} d\,v_{k-1,\,k}$$

für alle N beschränkt.

Wir kommen nunmehr zur Darstellung aller auf $\overline{F}$ beschränkter Integrale durch die $v_{k-1,\,k}$:

Ist $u(z)$ ein auf $\overline{F}$ beschränktes Integral und sind seine Perioden über die A-Querschnitte

$$\gamma_n = \int_{A_n} du,$$

so gilt bis auf additive Konstante die Darstellung

$$u(z) = \sum_{1}^{\infty} \sigma_n\, v_{n-1,\,n},$$

wo $\sigma_n = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1}$.

Bezeichnet man auf F zwei mit derselben Koordinate übereinanderliegende Punkte mit z und $\dot{z}$, so ist $\frac{d}{dz}\,[u(z) + u(\dot{z})]$ auf der z-Ebene eindeutig, und da $u(z)$ beschränkt sein soll, gleich Null. Seien ferner z und $\bar{z}$ auf demselben Blatt konjugiert liegende Punkte, so bilden wir

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\,\Re\,[u(z) - u(\bar{z})] + \frac{i}{2}\,\Im\,[u(z) + u(\bar{z})] = \tfrac{1}{2}\,[u(z) - \overline{u(\bar{z})}]$$

Dann ist φ_1 ein auf F reguläres Integral und wieder beschränkt auf $\overline{F}$. An den a-Intervallen der reellen Achse fällt $\bar{z}$ mit $\dot{z}$, an den

b-Intervallen $\bar{z}$ mit z zusammen; also ist $\frac{d\varphi_1}{dz}$ an den a-Intervallen rein reell, an den b-Intervallen imaginär und es ist

$$\int_{A_n} d\varphi_1 = \Re \int_{A_n} du = \Re\, \gamma_n = \gamma'_n;$$

die γ'_n sind (wie die γ_n) natürlich beschränkt, ebenso die Summen

$$\sum_0^{N-1} \gamma'_n = \Re\, \sigma_N = \sigma'_N = 2\,\Re \int_{\alpha_0}^{\alpha_{2N}} d\varphi_1$$

die Realteile der σ_n sind also gleichfalls beschränkt. (σ_0 sei $= 0$.)

Wir bilden für jedes N das Integral

$$\sum_1^N \sigma'_n\, v_{n-1,\,n} = v^{(N)}.$$

Dann ist für $\nu < N$

$$\int_{A_\nu} d\, v^{(N)} = \sigma'_{\nu+1} - \sigma'_\nu = \gamma'_\nu \text{ und}$$

$$\int_{A_N} d\, v^{(N)} = -\sigma'_N = -(\gamma'_0 + \gamma'_1 + \cdots + \gamma'_{N-1}).$$

Für jedes N ist $\Re\, v^{(N)}$ etwa auf der oberen Halbebene des ersten Blattes beschränkt. Nimmt man $v_{n-1,\,n}(\alpha_0) = 0$, so ist ($n \geqq 1$)

$$\Re\, v_{n-1,\,n} = \tfrac{1}{2}\,\delta_{n\,m} \text{ für die Intervalle } b_m \text{ und}$$
$$\Re\, v^{(N)} = \tfrac{1}{2}\,\sigma'_n \text{ für die Intervalle } b_n \text{ mit } n \leqq N$$
$$= 0 \text{ für die Intervalle } b_n \text{ mit } n > N,$$

also beschränkt, und zwar gleichmäßig für alle N. Ebenso ist, wie man sofort sieht, $\Re\, v^{(N)}$ auf unserer Halbebene, und zwar gleichmäßig für alle N beschränkt. Es gibt dann eine in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig konvergente Teilfolge der $\Re\, v^{(N)}$, deren Limes schließlich von der Teilfolge unabhängig und durch die Summe dargestellt ist

$$\sum_1^\infty \sigma'_n\, \Re\, v_{n-1,\,n} = g;$$

g ist dann, auf ganz F fortgesetzt, eine Potentialfunktion und auf $\bar{F}$ beschränkt. Für die Perioden gilt

$$\int_{A_n} d\, g = \gamma'_n \text{ und } \int_{B_n} d\, g = 0;$$

also ist $g - \Re \varphi_1(z)$ eine auf F eindeutige und beschränkte Potentialfunktion und daher konstant. Wir haben also schließlich bis auf eine Konstante

$$\varphi_1(z) = \sum_1^\infty \sigma'_n v_{n-1,n},$$

welche Reihe in jedem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich unserer Halbebene gleichmäßig konvergiert.

Setzen wir nun zweitens

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2} \Re [u(z) + u(\bar{z})] + \frac{i}{2} \Im [u(z) - u(\bar{z})] = \tfrac{1}{2} [u(z) + \overline{u(\bar{z})}],$$

so ist φ_2 auf F regulär und auf $\overline{F}$ beschränkt. Hier sind die $\frac{d\varphi_2}{dz}$ an den a-Intervallen imaginär, an den b-Intervallen reell. Es ist

$$\int_{A_n} d\varphi_2 = i \Im \int_{A_n} du = i \Im \gamma_n = i \gamma''_n;$$

die γ''_n sind beschränkt, ebenso die Summen

$$\sum_0^{N-1} \gamma''_n = \Im \sigma_N = \sigma''_N = 2 \Im \int_{\alpha_0}^{\alpha_{2N}} d\varphi_2$$

für alle N. Mit Hilfe derselben Überlegungen wie oben kommen wir auf die Darstellung

$$\varphi_2(z) = i \sum_1^\infty \sigma''_n v_{n-1,n}$$

und dadurch schließlich auf

$$u = \varphi_1 + \varphi_2 = \sum_1^\infty \sigma_n v_{n-1,n},$$

welche Reihe auf jedem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich unserer Halbebene gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten σ_n müssen dabei, wie wir gesehen haben, beschränkt sein.

Umgekehrt ist eine Summe $\sum_1^\infty \sigma_n v_{n-1,n}$ mit beliebigen, aber beschränkten σ_n i. a. nicht beschränkt. Ist z. B. $\sigma_n = 1$, so ist

$$\sum_1^N v_{n-1,n} = v_{01} + v_{12} + \cdots + v_{N-1,N} = v_{0N};$$

die Folge der — etwa auf der oberen Halbebene eines Blattes genommenen — gleichmäßig beschränkten Potentialfunktionen $\Re v_{0N}$ konvergiert, wie man sofort sieht, und es ist

$$\Re \sum_{1}^{\infty} v_{n-1\,n} = h$$

eine beschränkte Potentialfunktion mit den Perioden

$$\int_{A_n} d\,h = \begin{matrix} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \int_{B_n} d\,h = 0$$

Dadurch ist aber h als Realteil eines Normal-Integrals erster Gattung auf F bestimmt: diese Integrale sind aber bekanntlich nicht beschränkt.

Die Normalintegrale v_k erster Gattung auf F, die mit beschränktem Realteil durch

$$\Re \int_{A_i} d\,v_k = \delta_{ik} \text{ und } \Re \int_{B_i} d\,v_k = 0$$

definiert sind, lassen sich durch die beschränkten Normalintegrale v_{ik} darstellen:

$$v_k = \sum_{k+1}^{\infty} v_{n-1,\,n} = \lim_{n \to \infty} v_{k\,n}.$$

Die Differenz zweier Normalintegrale erster Gattung ist

$$v_k - v_l = \sum_{k+1}^{l} v_{n-1\,n} = v_{k\,l}, \quad (k < l)$$

also ein beschränktes Normalintegral auf F.

Wir fragen nach den Bedingungen für die beschränkten Koeffizienten σ_n, damit die — in jedem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich der Halbebene gleichmäßig konvergent vorauszusetzende — Reihe $\sum_{1}^{\infty} \sigma_n v_{n-1\,n}$ ein beschränktes Integral liefert. Soll das der Fall sein, so muß

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_{2N}} d\left(\sum_{1}^{\infty} \sigma_n v_{n-1\,n}\right) = \sum_{1}^{\infty} \sigma_n \int_{\alpha_0}^{\alpha_{2N}} dv_{n-1\,n} = \sum_{1}^{\infty} \sigma_n \left[\tfrac{1}{2}\,\delta_{nN} + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} a_{nj}\right]$$

beschränkt sein, d. h. es muß $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sum_{j=1}^{N} a_{nj}$ für alle N konvergent und beschränkt sein.

Sind andererseits die σ_n beschränkt und genügen dieser weiteren Bedingung, dann hat die wieder im obigen Sinn gleichmäßig konvergent vorausgesetzte Reihe $\sum_{1}^{\infty} \sigma_n v_{n-1\,n}$ auf der reellen Achse beschränkte Werte; Real- und Imaginärteil der Teilsummen dieser Reihe

sind wieder auf der Halbebene gleichmäßig beschränkt, also ist auch die Reihe selbst auf der Halbebene beschränkt.

Die auf $\overline{F}$ beschränkten Integrale sind also identisch mit den in jedem abgeschlossenen beschränktem Bereich gleichmäßig konvergenten Reihen $\sum_1^\infty \sigma_n v_{n-1\,n}$, für welche die Koeffizienten σ_n beschränkt und so beschaffen sind, daß die Summen $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sum_{j=1}^{N} a_{nj}$ für alle N beschränkt sind.

Eine Weiterführung dieser Arbeit erscheint demnächst in diesen Monatsheften.

Literatur.

1. *L. Ahlfors*, Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen (Annales academiae scientiarum fennicae, ser. A I 1947).
2. *H. Hornich*, Integrale erster Gattung auf speziellen transcendenten Riemannschen Flächen (Monatshefte für Math. u. Ph., 40, 1933).
3. *H. Hornich*, Beschränkte Integrale auf der Riemannschen Fläche von $\sqrt{\cos\frac{\pi z}{2}}$ (Ibidem, 42, 1935).
4. *H. Hornich*, Über transcendente Integrale erster Gattung (Ibidem, 47, 1939).
5. *P. J. Myrberg*, Über transcendente hyperelliptische Integrale erster Gattung (Annales academiae scientiarum fennicae, ser. A I, 1943).
6. *P. J. Myrberg*, Über Integrale auf transcendenten, symmetrischen Riemannschen Flächen (Ibidem, 1945).
7. *P. J. Myrberg*, Über analytische Funktionen auf transcendenten zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit reellen Windungspunkten (Acta Mathematica, 76, 1944).
8. *R. Nevanlinna*, Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (Annales academiae scientiarum fennicae, ser. A I, 1940).

Obere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei Eilinien und die entsprechenden Größen bei Eiflächen.

Von
L. Berwald †, Prag.*

(Eingelangt am 20. Oktober 1948.)

Es seien L der Umfang, F der Flächeninhalt einer Eilinie in der Ebene, M das Integral der mittleren Krümmung, O die Oberfläche, V der Rauminhalt einer Eifläche im Raum. Dann sind die Ausdrücke

$$L^2 - 4\pi F; \quad M^2 - 4\pi O, \quad O^2 - 3MV \tag{1}$$

bekanntlich nicht negativ. Bei stetig und positiv gekrümmten Eilinien und Eiflächen haben *H. Liebmann*[1] und *O. Bottema*[2] für $L^2 - 4\pi F$, *H. Liebmann*[1] für $M^2 - 4\pi O$ *obere* Schranken angegeben, die nur von der Differenz der größten und kleinsten (Haupt-) Krümmungsradien abhängen[3]. Im folgenden werden allgemeiner für sämtliche Ausdrücke (1) und für die auf zwei Eilinien, bzw. Eiflächen bezüglichen

$$\begin{cases} L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0; \\ M^2 M_0^2 - 16\pi^2 O O_0,\ M^2 O_0^2 - 12\pi O M_0 V_0,\ O^2 M_0^2 - 12\pi M V O_0 \end{cases} \tag{2}$$

---

* *L. Berwald* wurde am 20. Oktober 1941 von Prag nach Lodz deportiert. Er starb dort am 20. April 1942. Unmittelbar vor der Deportation übergab er mir beim Abschied diese Arbeit. — *P. Funk.*

[1] *H. Liebmann*, Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wissensch., 1918, S. 489—505.

[2] *O. Bottema*, Eine obere Grenze für das isoperimetrische Defizit einer ebenen Kurve. Proc. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 1933, S. 442—446.

[3] In der Menge aller konvexen Bereiche, bzw. Körper und auch schon in der Teilmenge aller konvexen Bereiche, bzw. Körper mit inneren Punkten und lauter regulären Randpunkten sind die Funktionale (1) gewiß nach oben nicht beschränkt. Man betrachte etwa in der Ebene die Parallelkurve, im Raume die Parallelfläche einer Strecke von der Länge s im festen Abstand h. Im ersten Fall ist

$$L^2 - 4\pi F = 4s^2$$

im zweiten

$$M^2 - 4\pi 0 = s^2\pi^2,\ O^2 - 3MV = h^2 s^2 \pi^2$$

so daß man durch Vergrößerung von s jede positive Schranke übertreffen kann.

obere Schranken abgeleitet, in die — gegebenenfalls neben anderen Größen — die Differenz der größten und kleinsten (Haupt-) Krümmungsradien selbst oder ihrer reziproken Werte eingeht. Dabei wird wesentlich ein von *G. Pólya*[4] herrührender Gedanke benutzt. Obwohl es sich um Dinge einfachster Art handelt, ist eine Zusammenstellung der erhaltenen Ungleichungen vielleicht nicht ganz unnütz.

§ 1. Voraussetzungen und Hilfssätze.

1. Wir setzen im folgenden voraus, daß die betrachteten Eilinien stetigen und positiven Krümmungsradius, die betrachteten Eiflächen stetige und positive Hauptkrümmungsradien besitzen. Wir benutzen für Eilinien $\mathfrak{L}$ die Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0, \tag{1,1}$$

für Eiflächen $\mathfrak{F}$ die Ungleichungen

$$M^2 - 4\pi O \geqq 0,\ O^2 - 3 M V \geqq 0. \tag{1,2}$$

In (1,1) gilt das Gleichheitszeichen nur für den Kreis, in jeder der Ungleichungen (1,2) bei unseren Voraussetzungen nur für die Kugel.

2. Der größte Teil unserer Entwicklungen beruht auf folgendem *Hilfssatz:*

Es sei

$$\begin{cases} f(x) = a x^2 + 2 b x + c, \\ a > 0,\ b^2 - a c \geqq 0, \end{cases} \tag{2,1}$$

ferner

$$a \leqq A \tag{2,2}$$

und

$$\begin{cases} f(\alpha) \geqq 0,\ f(A) \geqq 0, \\ f'(\alpha) \leqq 0,\ f'(A) \geqq 0, \end{cases} \tag{2,3}$$

wo $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ ist. Dann ist:

$$b^2 - a c \leqq \frac{a^2}{4} (A - \alpha)^2, \tag{2,4}$$

und das Gleichheitszeichen gilt in (2,4) *dann und nur dann, wenn α und A die Wurzeln von $f(x) = 0$ sind.*

---

[4] *G. Pólya*, Aufgaben 563, 564, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 27 (1918), S. 162. Siehe auch *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II., Berlin 1925, 9. Abschnitt, Aufgaben 6, 7, S. 163f.; Lösungen S. 389f.

Der Beweis liegt auf der Hand, da der Minimalwert von $f(x)$ nicht positiv ist und die Ungleichung (2,4) aussagt, daß $A - a$ mindestens gleich dem Absolutbetrage der Differenz der Wurzeln von $f(x) = 0$ ist.

3. Wir stellen noch einige bekannte Formeln zusammen, von denen wir weiterhin Gebrauch machen. Wenn $h(\varphi)$ die Stützfunktion und $r(\varphi)$ der Krümmungsradius einer Eilinie $\mathfrak{L}$ im Punkte mit der Tangentenrichtung $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ist, so gilt:

$$\begin{cases} L = \int h(\varphi)\, d\varphi = \int r(\varphi)\, d\varphi, \\ F = \frac{1}{2} \int h(\varphi)\, r(\varphi)\, d\varphi, \end{cases} \tag{3,1}$$

wo die Integration nach φ von 0 bis 2π zu erstrecken ist.

Wenn $h(\omega)$ die Stützfunktion, $r(\omega)$, $\bar{r}(\omega)$ die Hauptkrümmungsradien einer Eifläche $\mathfrak{F}$ als Funktionen eines auf der Einheitskugel veränderlichen Punktes, $d\omega$ das Flächenelement der Einheitskugel im Punkte ω sind, so gilt:

$$\begin{cases} M = \int h(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2} \int (r(\omega) + \bar{r}(\omega))\, d\omega, \\ O = \frac{1}{2} \int h(\omega)\, (r(\omega) + \bar{r}(\omega))\, d\omega = \int r(\omega)\, \bar{r}(\omega)\, d\omega, \\ V = \frac{1}{3} \int h(\omega)\, r(\omega)\, \bar{r}(\omega)\, d\omega, \end{cases} \tag{3,2}$$

wo die Integration sich über die ganze Oberfläche der Einheitskugel erstreckt[5].

§ 2. Abschätzungen für Eilinien.

4. Wir betrachten außer der Eilinie $\mathfrak{L}$ noch eine zweite, $\mathfrak{L}_0$, mit dem Umfang L_0 und dem Flächeninhalt F_0. Durch eventuelle Parallelverschiebung sei erreicht, daß der Ursprung im Inneren von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_0$ liegt. $h_0(\varphi)$ sei dann die Stützfunktion, $r_0(\varphi)$ der Krümmungsradius von $\mathfrak{L}_0$ im Punkte mit der Tangentenrichtung $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Die Diskriminante $F F_0 - \frac{L^2 L_0^2}{16\pi^2}$ des Polynoms

$$\Phi(x) = F + \frac{L L_0}{2\pi} x + F_0 x^2 \tag{4,1}$$

ist wegen (1,1) und $L_0^2 - 4\pi F_0 \geqq 0$ nicht positiv. Aus (3,1) erhält man

[5] Wir setzen auch bei mehrfachen Integralen nur ein Integralzeichen.

$$\begin{cases} \Phi\ (x) = \dfrac{1}{4\pi} \int (h(\varphi) + h_0(\varphi_0)\, x)\,(r(\varphi) + r_0(\varphi_0)\, x)\, d\varphi\, d\varphi_0, \\ \Phi'(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int h_0(\varphi_0)\,(r(\varphi) + r_0(\varphi_0)\, x)\, d\varphi\, d\varphi_0,^{6} \end{cases} \tag{4,2}$$

wo die Integration sowohl nach φ als auch nach φ_0 über das Intervall $(0, 2\pi)$ zu erstrecken ist.

Es sei nun $\varrho\, \mathfrak{L}_0$ die größte zu $\mathfrak{L}_0$ homothetische Eilinie, die in $\mathfrak{L}$ unbehindert rollen kann, $P\, \mathfrak{L}_0$ die kleinste, in der $\mathfrak{L}$ unbehindert rollen kann. Dann gilt für alle Wertepaare φ_0, φ:

$$\begin{cases} \varrho\, h_0(\varphi_0) \leqq h(\varphi), \ \varrho\, r_0(\varphi_0) \leqq r(\varphi), \\ P\, h_0(\varphi_0) \geqq h(\varphi), \ P\, r_0(\varphi_0) \geqq r(\varphi). \end{cases} \tag{4,3}$$

Wegen (4,2) und (4,3) ist (2,3) für $f = \Phi$, $\alpha = -P$, $A = -\varrho$ erfüllt. Also folgt (Nr. 2)

$$\boxed{L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0 \leqq 4\pi^2 F_0^2 (P - \varrho)^2.} \tag{4,4}$$

Das Gleichheitszeichen steht in (4,4) *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{L}_0$ *und* $\mathfrak{L}$ *Kreise sind.* Denn nach Nr. 2 sind für das Eintreten des Gleichheitszeichens notwendig und hinreichend die Gleichungen

$$\begin{cases} \Phi(-P) = \dfrac{1}{4\pi} \int (h(\varphi) - h_0(\varphi_0)\, P)\,(r(\varphi) - r_0(\varphi_0)\, P)\, d\varphi\, d\varphi_0 = 0, \\ \Phi(-\varrho) = \dfrac{1}{4\pi} \int (h(\varphi) - h_0(\varphi_0)\, \varrho)\,(r(\varphi) - r_0(\varphi_0)\, \varrho)\, d\varphi\, d\varphi_0 = 0. \end{cases} \tag{4,5}$$

Da der Integrand nicht negativ ist, kann $\Phi(-P) = 0$ nur bestehen, wenn für alle Wertepaare φ, φ_0 entweder $h(\varphi) - P\, h_0(\varphi_0) = 0$ oder $r(\varphi) - P\, r_0(\varphi_0) = 0$ ist. Aus der zweiten Gleichung folgt $r(\varphi) = \text{konst.}$, $r_0(\varphi_0) = \text{konst.}$ Die erste hat $h(\varphi) = \text{konst.}$, $h_0(\varphi_0) = \text{konst.}$ und daher wieder $r(\varphi) = \text{konst.}$, $r_0(\varphi_0) = \text{konst.}$ zur Folge. Die zweite Gleichung (4,5) ist jetzt (mit $\varrho = P$) von selbst erfüllt.

Durch Vertauschung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_0$ erhält man die Ungleichung

$$L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0 \leqq 4\pi^2 F^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2, \tag{4,6}$$

---

[6] Wir schreiben für die auftretenden Polynome möglichst *bequeme* Integralausdrücke.

da $\frac{1}{\varrho}$ $\mathfrak{L}$ die kleinste zu $\mathfrak{L}$ homothetische Eilinie ist, in der $\mathfrak{L}_0$ unbehindert rollen kann und $\frac{1}{P}$ $\mathfrak{L}$ die größte, die in $\mathfrak{L}_0$ unbehindert rollen kann. Wieder gilt das Gleichheitszeichen nur im Falle zweier Kreise.

5. Wenn $\mathfrak{L}_0$ der Einheitskreis ist, so wird P der größte, ϱ der kleinste Krümmungsradius von $\mathfrak{L}$[7]. (4,4) geht in die Ungleichung von *Bottema*[8]

$$\boxed{L^2 - 4\pi F \leqq \pi^2 (P - \varrho)^2.} \tag{5,1}$$

und (4,6) in die Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F \leqq F^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2 \tag{5,2}$$

über. *Das Gleichheitszeichen gilt beide Male nur für den Kreis.*

Wenn $\mathfrak{L}_0$ eine beliebige Eilinie ist und L den Relativumfang der Eilinie $\mathfrak{L}$ in Bezug auf $\mathfrak{L}_0$ (d. h. den doppelten gemischten Flächeninhalt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_0$), ϱ und P den kleinsten und größten Relativkrümmungsradius von $\mathfrak{L}$ in Bezug auf $\mathfrak{L}_0$ bedeuten[9], so treten an Stelle von (5,1), (5,2) analoge Ungleichungen, in denen F_0 an Stelle von π steht. In ihnen gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $\mathfrak{L}$ ein Relativkreis (d. h. zu $\mathfrak{L}_0$ homothetisch) ist.

§ 3. Abschätzungen für Eiflächen.

6. Wir betrachten außer der Eifläche $\mathfrak{F}$ noch eine zweite, $\mathfrak{F}_0$, mit dem Integral der mittleren Krümmung M_0, der Oberfläche O_0 und dem Rauminhalt V_0. Der Ursprung liege im Inneren von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_0$. Es seien $h_0(\omega)$ die Stützfunktion, $r_0(\omega)$, $\bar{r}_0(\omega)$ die Hauptkrümmungsradien von $\mathfrak{F}_0$. Wir bilden die Polynome

$$\Omega(x) = O + \frac{M M_0}{2\pi} x + O_0 x^2, \tag{6,1}$$

$$S(x) = \frac{O M_0}{4\pi} + \frac{M O_0}{2\pi} x + 3 V_0 x^2, \tag{6,2}$$

[7] Vgl. etwa *W. Blaschke*, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 114ff.

[8] *O. Bottema*, a. a. O. Eine ungenauere Schranke (mit 4π anstatt π^2) schon bei *H. Liebmann*, a. a. O., S. 493.

[9] Vgl. *W. Süß*, Zur relativen Differentialgeometrie: I. Über Eilinien und Eiflächen in der elementaren und affinen Differentialgeometrie. Japanese Journ. of Math. 4 (1927), S. 57—75.

$$T(x) = 3V + \frac{O M_0}{2\pi} x + \frac{M O_0}{4\pi} x^2. \tag{6,3}$$

Die Diskriminante $O O_0 - \dfrac{M^2 M_0^2}{16\pi^2}$ von $\Omega(x)$ ist wegen (1,2) nicht positiv, ebenso die Diskriminante

$$3\frac{O M_0}{4\pi} V_0 - \frac{M^2 O_0^2}{16\pi^2} = -\frac{4\pi O(O_0^2 - 3 M_0 V_0) + O_0^2 (M^2 - 4\pi O)}{16\pi^2}$$

von $S_1(x)$ und die entsprechend gebaute von $T(x)$. Ferner folgt aus (3,2)

$$\begin{cases} \Omega(x) = \dfrac{1}{8\pi} \int (h(\omega) + h_0(\omega_0)\, x)\, \{r(\omega) + \bar{r}(\omega) + (r_0(\omega_0) + \bar{r}_0(\omega_0))\, x\}\, d\omega\, d\omega_0, \\ \Omega'(x) = \dfrac{1}{4\pi} \int (h(\omega) + h_0(\omega_0)\, x)\, (r_0(\omega_0) + \bar{r}_0(\omega_0))\, d\omega\, d\omega_0; \end{cases} \tag{6,4}$$

$$\begin{cases} S(x) = \dfrac{1}{8\pi} \int h_0(\omega_0)\, \{(r(\omega) + r_0(\omega_0)\, x)(\bar{r}(\omega) + \bar{r}_0(\omega_0)\, x) + (r(\omega) + \\ \qquad + \bar{r}_0(\omega_0)\, x)\, (\bar{r}(\omega) + r_0(\omega_0)\, x)\}\, d\omega\, d\omega_0, \\ S'(x) = \dfrac{1}{4\pi} \int r_0(\omega_0)\, \bar{r}_0(\omega_0)\, (r(\omega) + \bar{r}(\omega) + 2 h_0(\omega_0)\, x)\, d\omega\, d\omega_0; \end{cases} \tag{6,5}$$

$$\begin{cases} T(x) = \dfrac{1}{8\pi} \int h(\omega)\, \{(r(\omega) + r_0(\omega_0)\, x)(\bar{r}(\omega) + \bar{r}_0(\omega_0)\, x) + (r(\omega) + \\ \qquad + \bar{r}_0(\omega_0)\, x)(\bar{r}(\omega) + r_0(\omega_0)\, x)\}\, d\omega\, d\omega_0, \\ T'(x) = \dfrac{1}{4\pi} \int h_0(\omega_0)\, h(\omega)\, \{r(\omega) + \bar{r}(\omega) + (r_0(\omega_0) + \bar{r}_0(\omega_0)\, x)\}\, d\omega\, d\omega_0. \end{cases} \tag{6,6}$$

In (6,4) — (6,6) ist die Integration sowohl nach ω als auch nach ω_0 über die ganze Oberfläche der Einheitskugel zu erstrecken.

Es sei nun $\varrho\, \mathfrak{F}_0$ die größte zu $\mathfrak{F}_0$ homothetische Eifläche, die in $\mathfrak{F}$ unbehindert rollen kann, $P\, \mathfrak{F}_0$ die kleinste, in der $\mathfrak{F}$ unbehindert rollen kann. Dann gilt für alle Wertepaare ω, ω_0:

$$\begin{cases} \varrho\, h_0(\omega_0) \leqq h(\omega),\ \varrho\ .\ \mathrm{Max}\,(r_0(\omega_0), \bar{r}_0(\omega_0)) \leqq \mathrm{Min}\,(r(\omega), \bar{r}(\omega)), \\ P\, h_0(\omega_0) \geqq h(\omega),\ P\ .\ \mathrm{Min}\,(r_0(\omega_0), \bar{r}_0(\omega_0)) \geqq \mathrm{Max}\,(r(\omega), \bar{r}(\omega)). \end{cases} \tag{6,7}$$

Wegen (6,4) — (6,7) ist (2,3) für $f = \Omega$, S, T und $\alpha = -P$, $A = -\varrho$ erfüllt. Nach Nr. 2 gelten also die Ungleichungen

$$\boxed{M^2 M_0^2 - 16\pi^2 O O_0 \leqq 4\pi^2 O_0^2 (P - \varrho)^2,} \tag{6,8}$$

$$\boxed{M^2 O_0^2 - 12\pi O M_0 V_0 \leqq 36\pi^2 V_0^2 (P - \varrho)^2} \tag{6,9}$$

$$O^2 M_0^2 - 12\pi M V O_0 \leqq \frac{M^2 O_0^2}{4}(P-\varrho)^2 \quad . \tag{6,10}$$

Für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (6,8) sind die Bedingungen $\Omega(-P) = \Omega(-\varrho) = 0$ notwendig und hinreichend. Analog wie in Nr. 4 erkennt man, daß sie sich auf ($P = \varrho$ und) die Gleichungen

$$r(\omega) + \bar{r}(\omega) = \text{konst.}, \quad r_0(\omega_0) + \bar{r}_0(\omega_0) = \text{konst.} \tag{6,11}$$

reduzieren, die $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_0$ als Kugeln kennzeichnen[10]. Bei (6,9) und (6,10) findet man als notwendige und hinreichende Bedingungen für das Eintreten des Gleichheitszeichens auf entsprechende Weise zunächst, daß beide Hauptkrümmungsradien der einen Fläche, etwa $r_0(\omega_0)$ und $\bar{r}_0(\omega_0)$ und ein Hauptkrümmungsradius der anderen, etwa $r(\omega)$, konstant sind. $\mathfrak{F}_0$ ist also eine Kugel und $\mathfrak{F}$ eine Kugel oder eine Röhrenfläche, d. h. die Enveloppe einer Kugel von festem Radius, deren Mittelpunkt eine räumliche Kurve durchläuft. Da $\mathfrak{F}$ Eifläche ist, käme außer der Kugel nur die teleskopisch ausgezogene Kugel in Betracht. Diese scheidet aber aus, weil auf ihr $\bar{r}(\omega)$ im zylindrischen Teil unendlich ist. Somit ist auch $\mathfrak{F}$ eine Kugel.

Das Gleichheitszeichen gilt also in (6,8) — (6,10) *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}_0$ *Kugeln sind.*

Vertauschung von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_0$ gibt die weiteren Ungleichungen

$$M^2 M_0^2 - 16\pi^2 O O_0 \leqq 4\pi^2 O^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2, \tag{6,12}$$

$$O^2 M_0^2 - 12\pi M V O_0 \leqq 36\pi^2 V^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2, \tag{6,13}$$

$$M^2 O_0^2 - 12\pi O M_0 V_0 \leqq \frac{O^2 M_0^2}{4}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2, \tag{6,14}$$

in denen das Gleichheitszeichen wieder dann und nur dann gilt, wenn $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_0$ Kugeln sind.

7. Wenn $\mathfrak{F}_0$ die Einheitskugel ist, so wird $\Omega(x) = S(x)$ und P der größte, ϱ der kleinste Hauptkrümmungsradius von $\mathfrak{F}$[11]. Die Ungleichungen (6,8)—(6,10) gehen über in

---

[10] Vgl. etwa *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper Berlin 1934, S. 117, wo man die Literatur zitiert findet.

[11] Vgl. *W. Blaschke*, a. a. O., S. 118f.

$$M^2 - 4\pi O \leqq 4\pi^2 (P - \varrho)^2, \tag{7,1}$$[12]

$$O^2 - 3\,M\,V \leqq \frac{M^2}{4} (P - \varrho)^2, \tag{7.2}$$

und die Ungleichungen (6,12)—(6,14) in

$$O^2 - 3\,M\,V \leqq \frac{9\,V^2}{4} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2, \tag{7,3}$$

$$M^2 - 4\pi O \leqq \frac{O^2}{4} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right)^2. \tag{7,4}$$

Das Gleichheitszeichen gilt überall nur für die Kugel.

Wenn $\mathfrak{F}_0$ eine beliebige Eifläche, M, O das Integral der mittleren Relativkrümmung und die Relativoberfläche der Eifläche $\mathfrak{F}$ in Bezug auf $\mathfrak{F}_0$ (d. h. die dreifachen gemischten Rauminhalte $V(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_0)$, bzw. $V(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0)$) sind, endlich ϱ und P der kleinste und größte Relativkrümmungsradius von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf $\mathfrak{F}_0$[9], so treten an Stelle von (7,1)—(7,4) analoge Ungleichungen, in denen O_0 an Stelle von 4π steht. In ihnen gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $\mathfrak{F}$ eine Relativsphäre (d. h. zu $\mathfrak{F}_0$ homothetisch) ist.

8. Es werde noch kurz angegeben, wie sich die Ungleichungen (7,1)—(7,4) mittels der Schwarzschen Ungleichung ableiten lassen, weil sich auf diesem Wege beiläufig auch genauere Ungleichungen ergeben.

Wegen (3,2) ist

$$M^2 - 4\pi O = \frac{1}{4} \left\{ \int (r(\omega) + r(\omega))\, d\omega \right\}^2 - 4\pi \int r(\omega)\, \bar{r}(\omega)\, d\omega, \tag{8,1}$$

$$O^2 - 3\,M\,V = \frac{1}{4} \left\{ \int h(\omega)\, (r(\omega) + \bar{r}(\omega))\, d\omega \right\}^2 - \int h(\omega) d\omega \int h(\omega)\, r(\omega)\, \bar{r}(\omega)\, d\omega. \tag{8,2}$$

Mittels der Schwarzschen Ungleichung und (3,2) erhält man

$$\left\{ \int (r(\omega) + \bar{r}(\omega))\, d\omega \right\}^2 \leqq 4\pi \int (r(\omega) + \bar{r}(\omega))^2\, d\omega, \tag{8,3}$$

$$\left\{ \int h(\omega)\, (r(\omega) + \bar{r}(\omega))\, d\omega \right\}^2 \leqq M \int h(\omega)\, (r(\omega) + \bar{r}(\omega))^2\, d\omega, \tag{8,4}$$

[12] Eine ungenauere Schranke (mit $16\pi^2$ anstatt $4\pi^2$) bei *H. Liebmann*, a. a. O., S. 494.

wobei das Gleichheitszeichen nur für $r(\omega) + \bar{r}(\omega) = \text{konst.}$, d. h. nur für die Kugel gilt. Somit folgt:

$$M^2 - 4\pi O \leqq 4\pi \int \left(\frac{r(\omega) - \bar{r}(\omega)}{2}\right)^2 d\omega, \tag{8,5}$$

$$O^2 - 3 M V \leqq M \int h(\omega) \left(\frac{r(\omega) - \bar{r}(\omega)}{2}\right)^2 d\omega, \tag{8,6}$$

wo das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt. Ersetzt man in (8,5), (8,6) die Differenz $|r(\omega) - \bar{r}(\omega)|$ durch die nicht kleinere $P - \varrho$, so erhält man (7,1), (7,2).

Wenn man in (3,2) mittels

$$d\omega = \frac{1}{r(\omega)\,\bar{r}(\omega)}\, dO \tag{8,7}$$

das Flächenelement von $\mathfrak{F}$ in dem Punkte einführt, der dem Punkt ω der Einheitskugel entspricht und dann analog verfährt, wie soeben, so erhält man die Ungleichungen

$$M^2 - 4\pi O \leqq O \int \left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r(\omega)} - \frac{1}{\bar{r}(\omega)}\right)\right\}^2 dO, \tag{8,8}$$

$$O^2 - 3 M V \leqq 3 V \int h(\omega) \left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r(\omega)} - \frac{1}{\bar{r}(\omega)}\right)\right\}^2 dO, \tag{8,9}$$

wo das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt, und daraus wieder (7,3), (7,4).

Über verallgemeinerte Reliefperspektiven.

Von
Fred Rößler, Aachen.

Mit 7 Abbildungen.

(Eingelangt am 10. November 1948.)

Liegt bei einer zentrischen Kollineation im Raum die Kollineationsebene (der Ort der Inzidenzpunkte) zwischen dem Kollineationszentrum und der Fluchtebene, dann werden die vom Kollineationszentrum aus hinter der Kollineationsebene liegenden räumlichen Gebilde in den Raum zwischen der Kollineationsebene und der Fluchtebene abgebildet. Eine solche Abbildung nennt man Reliefperspektive, ihre Anwendungsgebiete sind die Reliefplastik und die Bühnendekoration, bei denen sie in Anpassung an das künstlerische Empfinden und an die praktischen Möglichkeiten in freier Durchführung zur Ausführung kommt.

Im folgenden werden Verallgemeinerungen dieser Abbildungsmethode angegeben, die darin bestehen, daß anstelle der Kollineations- und Fluchtebene nunmehr gewisse Kugeln oder Kegel treten[1]. Für solche Abbildungen, die für die Darstellung eines Reliefs in einer kugel- oder kegelförmigen Kuppel und bei Bühnenbildern mit Rundhorizont Verwendung finden können, werden geometrische Eigenschaften angegeben.

I. Kugelreliefe.

Wir legen um einen Punkt O, dem Auge des Beschauers, zwei Kugeln α und $\bar{\varphi}$ mit den Radien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f} > \mathfrak{a}$). Um einen Punkt P des Raumes durch eine zentrische Verwandtschaft abzubilden, schneiden wir den

[1] Für den Sonderfall von Zylindern siehe die Abhandlung des Verfassers: „Geometrische Betrachtungen über eine Verallgemeinerung der Reliefperspektive", Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik, Bd. 28, Heft 10 (1948), S. 311—316. Dortselbst auch weitere Literaturangabe.

Halbstrahl (OP) mit α im Punkte A und mit $\overline{\varphi}$ im Punkte $\overline{F}$ (Abb. 1). Die *Spurkugel* α sei — außer O — der Ort der Inzidenzpunkte der Verwandtschaft, die *Fluchtkugel* $\overline{\varphi}$ der Ort der Fluchtpunkte. Daher fällt

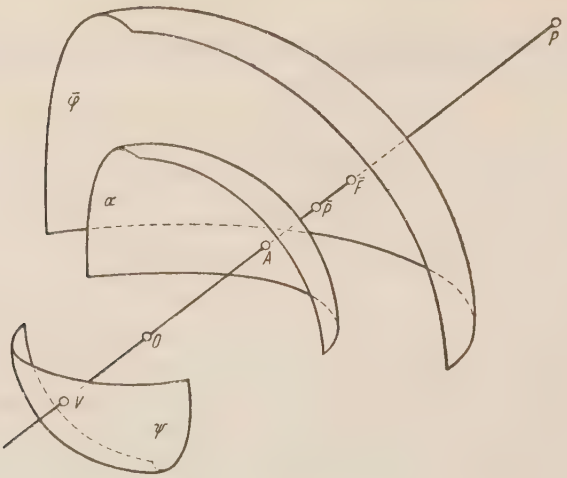


Abb. 1

das Bild $\overline{A}$ von A mit A zusammen und der Punkt $\overline{F}$ ist das Bild des Fernpunktes F_∞ der Geraden (OP). Wenn wir verlangen, daß die Bilder von je 4 auf einem Halbstrahl durch O liegenden Punkte das gleiche Doppelverhältnis haben wie die Punkte selbst, so folgt daraus für das Bild $\overline{P}$ eines Punktes P

$$(O\,A\,\overline{F}\,\overline{P}) = (O\,A\,F_\infty\,P); \tag{1}$$

damit ist dann seine Lage eindeutig bestimmt.

Den so gefundenen Punkt $\overline{P}$ könnte man auch das *1. Bild* von P nennen; denn wählt man als Inzidenzpunkt A und als Fluchtpunkt $\overline{F}$ diejenigen Schnittpunkte des Strahles (OP) mit α und $\overline{\varphi}$, die auf der anderen Seite von O liegen wie P, so erhält man ein *2. Bild* von P. Durch die Wahl von A und $\overline{F}$ auf verschiedenen Seiten von O kann man übrigens noch zwei weitere Bilder von P erhalten. Für das Relief selbst kommt natürlich nur das 1. Bild in Betracht.

Die 1. Bilder eigentlicher Punkte liegen stets innerhalb der Fluchtkugel, die 2. Bilder im ganzen Raum. Sind r_1 und r_2 die Längen der Abstände des 1. und 2. Bildes von O, wobei r_1 stets positiv und r_2 positiv

oder negativ zu nehmen ist, je nachdem das 2. Bild auf der entgegengesetzten oder auf derselben Seite von O liegt wie das 1. Bild, dann folgt

$$\frac{2\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2}{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2} = \mathfrak{f}. \tag{2}$$

Bei dieser Vorzeichenfestsetzung gilt

Satz 1: Das 1. und 2. Bild eines Punktes liegen so, daß das harmonische Mittel ihrer Abstände von O fest — gleich dem Radius der Fluchtkugel — ist.

Den auf der *Verschwindungskugel* ψ (um O mit dem Radius $\mathfrak{v} = \mathfrak{f} - \mathfrak{a}$) gelegenen Punkten entsprechen (als 2. Bilder) Fernpunkte.

a) Das Bild einer Geraden.

Jede Gerade durch O geht in sich selbst über; um das Bild einer nicht durch O gehenden Geraden g zu untersuchen, legen wir die Ebene (Og), die die 3 Kugeln α, $\bar{\varphi}$ und ψ in drei konzentrischen Kreisen a, $\bar{f}$ und v schneidet (für den Fall, daß (Og) horizontal ist, bezeichnen wir a als *Spurhorizont*, $\bar{f}$ als *Fluchthorizont* und v als *Verschwindungshorizont*). Die Parallele zu g durch O schneidet $\bar{f}$ in den beiden Fluchtpunkten $\bar{G}_1$ und $\bar{G}_2$ und a in den beiden Punkten A_1 und A_2 (Abb. 2). Weil für unsere Verwandtschaft stets

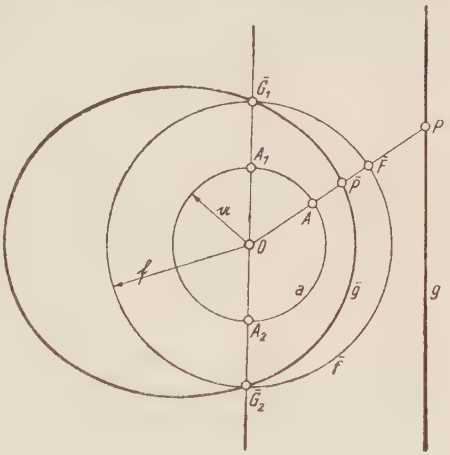


Abb. 2

$$(O\,A\,F_\infty\,\bar{F}) = \frac{\mathfrak{f}-\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}} \tag{3}$$

ist, so folgt aus (1) und (3)

$$(O\,P\,A\,\bar{P}) = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}}. \tag{4}$$

Durchläuft nun P die Gerade g, so folgt aus (4), daß man das 1. Bild von g erhält, wenn man auf das zwischen A_1 und A_2 auf derselben Seite von O wie g gelegene Stück des Kreises a die zentrische Kollineation

ausübt, die O zum Zentrum, g zur Kollineationsachse und die Charakteristik $\frac{a}{\mathfrak{f}}$ hat; das 2. Bild von g erhält man, wenn man den restlichen Teil von a der gleichen zentrischen Kollineation unterwirft. Durch sie wird a in einen Kegelschnitt $\bar{g}$ übergeführt, der O zum Brennpunkt und — weil er durch G_1 (und G_2) geht — $\mathfrak{f}$ als Parameter hat.

Für die folgenden Sätze ist es zweckmäßig, unter dem Namen *Bild* die Zusammenfassung des 1. und 2. Bildes zu verstehen; aus dem bisherigen ergibt sich der

Satz 2: Die nicht durch O gehenden Geraden des Raumes bilden sich als das System von Kegelschnitten mit gemeinsamen Brennpunkt O und dem gleichen Parameter $\mathfrak{f}$ ab.

b) Das Bild einer Ebene.

Eine Ebene durch O geht durch die Abbildung I in sich selbst über; da jede nicht durch O gehende Ebene durch Drehung einer nicht durch O gehenden Geraden um deren kürzesten Abstand von O erzeugt werden

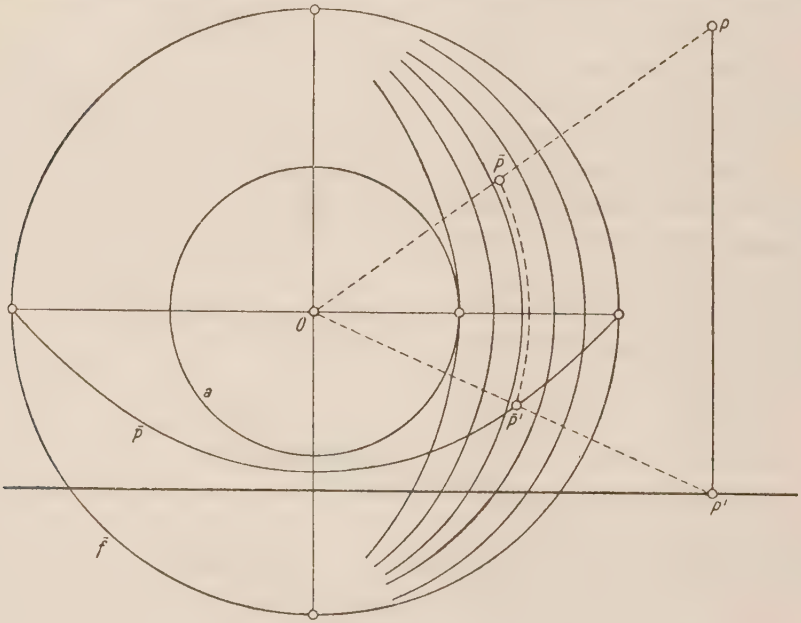


Abb. 3

kann, so entsteht ihr Bild durch Drehung eines der in Satz 2 genannten Kegelschnitte um seine durch O gehende Achse; dies ergibt

Satz 3: Die nicht durch O gehenden Ebenen bilden sich als das System von Drehflächen 2. Grades mit gemeinsamen Brennpunkt O und dem gleichen Parameter $\mathfrak{f}$ ab.

Abb. 3 stellt eine graphische Methode dar, um rasch Bilder (im Bild 3 nur 1. Bilder) von Punkten angenähert anzugeben. Man projiziert zunächst die gegebenen Punkte senkrecht auf eine — etwa horizontal gewählte — Ebene π_1, die nicht durch O geht; P' sei die Projektion eines abzubildenden Punktes P. Dann zeichne man in einer vertikalen, durch O gehenden Ebene den Meridian $\bar{p}$ des Bildes $\bar{\pi}_1$ von π_1, und ferner einige Kegelschnitte (etwa zwischen a und $\bar{f}$), die vertikalen Geraden in dieser Ebene entsprechen. Auf dem so vorbereiteten Papier kann dann $\bar{P}$ durch den in Abb. 3 angegebenen Linienzug durch Interpolation angenähert rasch ermittelt werden. Der gestrichelte Kegelschnitt braucht dabei nicht tatsächlich gezeichnet, sondern die Lage von $\bar{P}$, die ähnlich zu der von $\bar{P}'$ zwischen zwei gezeichneten Kegelschnitten ist, nur abgeschätzt zu werden; durch Drehung der vertikalen Ebene um die vertikale Gerade durch O kann die Methode mechanisiert werden.

c) Das Bild eines Kegelschnittes.

Das Bild eines in einer Ebene durch O gelegenen Kegelschnittes ist eine (ebene) Kurve 4. Ordnung, die — ebenso wie das Bild jeder Kurve — durch die aus (2) folgende Transformation

$$\mathfrak{r}_2 = \frac{\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}_1}{2\,\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{f}} \tag{5}$$

in sich selbst übergeführt wird. Die Kegelschnitte in nicht durch O gehenden Ebenen werden aus O durch nichtzerfallende Kegel 2. Grades projiziert. Daraus folgt nach dem früheren

Satz 4: Die nicht in Ebenen durch O liegenden Kegelschnitte bilden sich als das System jener Raumkurven 4. Ordnung ab, die aus den sphärischen Kegelschnitten der Kugel α durch zentrische Kollineation mit dem Kugelmittelpunkt O als Kollineationszentrum und mit der Charakteristik $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}}$ entstehen; die Ebene des abzubildenden Kegelschnittes ist dabei jeweils die Kollineationsebene.

Nur für das Bild derjenigen Kegelschnitte, die auf Drehkegeln mit der Spitze O liegen, zerfällt die genannte Kurve 4. Ordnung in 2 Kegelschnitte; insbesondere sind daher nur die Bilder derjenigen Kreise,

deren Drehachse durch O geht, Kegelschnitte, nämlich (zwei) Kreise.

Die Kurven 4. Ordnung in Satz 4 können auf andere Arten charakterisiert werden: sie sind die Schnittkurven von Drehflächen 2. Grades mit dem Parameter $\mathfrak{f}$ mit Kegeln 2. Grades, deren Spitzen in einem Brennpunkt der Drehflächen liegen; sie sind der geometrische Ort der auf Drehflächen 2. Grades vom festen Parameter $\mathfrak{f}$ liegenden Punkte, deren Verbindungsgerade mit einem Brennpunkt der Fläche mit 2 festen, durch diesen Brennpunkt gehenden Geraden eine konstante Winkelsumme oder -differenz einschließt.

*

Ändert man für die Abdildung I den Kugelradius $\mathfrak{a}$, so erhält man die gleichen — in den Sätzen 2, 3 und 4 (samt Sonderfällen) angegebenen — Bildsysteme und nur die individuelle Zuordnung ist verschieden.

II.

Es liegt nahe, in Verallgemeinerung der Abbildungsmethode I eine ebensolche II zu betrachten, bei der α und $\overline{\varphi}$ 2 zueinander ähnliche Drehflächen 2. Grades mit gemeinsamer Achse und einem gemeinsamen Brennpunkt O sind, die bezüglich dieses Brennpunktes O ähnlich liegen (mit positivem Ähnlichkeitsmodul; Abb. 4); bei dieser Abbildung II ergeben sich als Bildsysteme der betrachteten Mannigfaltigkeiten ebenfalls die gleichen wie bei I bei unterschiedlicher individueller Zuordnung. Die Konstante $\mathfrak{f}$ ist dabei der Parameter von $\overline{\varphi}$.

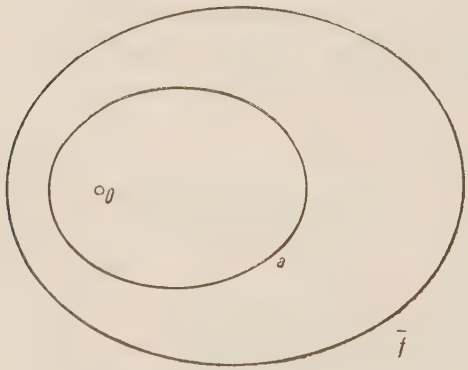


Abb. 4

III. Kegelreliefe.

In gleicher Weise wie I und mit gleicher Bedeutung der Bezeichnungen betrachten wir nun eine Abbildungsart III, bei der α und $\overline{\varphi}$ 2 kongruente Drehkegel mit gemeinsamer Achse z (und den Spitzen

S_1 und S_2) sind und O ein Punkt auf z, so daß S_1 zwischen O und S_2 liegt. Stellen wir uns z vertikal vor (Abb. 5) und legen wir durch O eine horizontale Ebene $\pi = (O/z)$! Sie schneidet den *Spurkegel* α und den

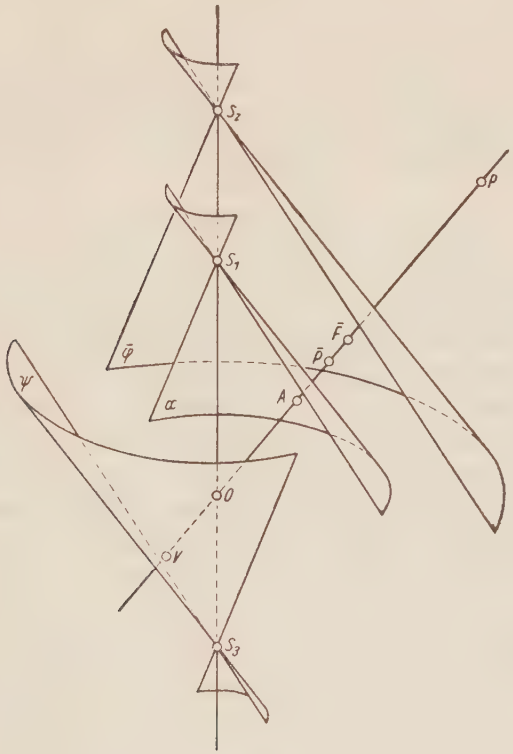


Abb. 5

Fluchtkegel $\bar{\varphi}$ in 2 Kreisen, dem *Spurhorizont* a und dem *Fluchthorizont* $\bar{f}$, deren Radien wir mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{f}$ bezeichnen ($\mathfrak{f} > \mathfrak{a}$). Durch den *Verschwindungshorizont* v mit dem Radius $\mathfrak{v} = \mathfrak{f} - \mathfrak{a}$ geht dann der *Verschwindungskegel* ψ.

a) Das Bild einer Geraden.

Zunächst erkennen wir, daß bei III die Verwandtschaft in π die gleiche ist wie die bei I vorkommende Verwandtschaft in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt. Weil auch für III α und $\bar{\varphi}$ so gewählt sind, daß stets

$$(O\,A\,F_\infty\,\bar{F}) = \frac{\mathfrak{f} - \mathfrak{a}}{\mathfrak{f}} \tag{3}$$

so folgt aus (1) und (3)

$$(O\,P\,A\,\bar{P}) = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}} \tag{4}$$

und dies besagt nun, daß man das Bild $\bar{g}$ einer nicht durch O gehenden Geraden g erhält, indem man auf die Schnittkurve a_ε von α und $\varepsilon = (Og)$ die zentrische Kollineation ausübt, die O als Zentrum, g als Kollineationsachse und die Charakteristik $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}}$ besitzt. Schneidet die abzubildende Gerade g die Kegelachse z, dann zerfällt a_ε in 2 Mantelstrahlen von α und $\bar{g}$ besteht aus 2 sich auf z schneidenden Geraden. Ist insbesondere g parallel zu z, also vertikal, dann ist $\bar{g}$ ein durch S_2 gehendes Geradenpaar. Aus obigem und nach Satz 2 ergibt sich

Satz 5: Die zur Kegelachse z windschiefen Geraden bilden sich bei III als jene in Ebenen durch O liegenden Kegelschnitte ab, deren Projektionen aus S_2, der Spitze des Fluchtkegels, auf $\pi = (O/z)$ Kegelschnitte mit dem gemeinsamen Brennpunkt O und dem gleichen Parameter $\mathfrak{f}$ sind.

Jede Gerade durch O geht in sich selbst über.

b) Das Bild einer Ebene.

Aus (4) folgt ferner, daß man das Bild einer nicht durch O gehenden Ebene ε erhält, indem man auf α jene zentrische Kollineation ausübt, die O zum Kollineationszentrum, ε zur Kollineationsebene und die Charakteristik $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}}$ hat. Daraus folgt

Satz 6: Die nicht durch O gehenden Ebenen bilden sich als das System von Kegeln 2. Grades ab, die z als gemeinsame Fokalachse haben und deren Spurkurven in π — also Kegelschnitte mit dem gemeinsamen Brennpunkt O — den gleichen Parameter $\mathfrak{f}$ haben.

Den Sonderfall von Zylindern ergeben dabei nur die durch die Spitze S_3 von ψ gehenden Ebenen. Jede Ebene durch O entspricht sich selbst.

Aus Satz 6 folgt

Satz 7: Die Schnittkurven eines Kegels 2. Grades mit Ebenen, die durch einen Punkt O seiner Fokalachse z gehen, werden aus beliebigen Punkten von z durch Kegel projiziert, deren Spurkurven mit der Ebene $\pi = (O/z)$ Kegelschnitte von festem Parameter sind.

Denn jede solche Schnittkurve $\bar{g}$ ist das Bild einer Geraden g, jeder durch $\bar{g}$ gehende Kegel 2. Grades mit der Spitze $\bar{S}$ auf z das Bild einer Ebene, nämlich der Ebene (Sg). — Es versteht sich dann von selbst, daß die in Satz 7 vorkommenden Projektionskegel ebenfalls z als Fokalachse haben, daß ferner O der gemeinsame Brennpunkt der Projektionskurven in π ist und daß ihr fester Parameter dem Parameter der Spurkurve des ursprünglich gegebenen Kegels mit der Ebene π gleich ist. Für den Fernpunkt von z als Kegelspitze ergibt sich speziell, daß die Normalprojektionen der Schnittkurven auf π die genannte Eigenschaft haben.

c) Das Bild eines Kegelschnittes.

Das Bild eines in einer Ebene durch O gelegenen Kegelschnittes k ist eine (ebene) Kurve 4. Ordnung, die in 2 Kegelschnitte zerfällt, wenn die Ebene von k durch z geht. Man erhält diese beiden Kegelschnitte, indem man auf k die zentrischen Kollineationen ausübt, die O zum Kollineationszentrum und von den in der Ebene von k liegenden Mantelstrahlen von α und $\bar{\varphi}$ jeweils die beiden zueinander parallelen zur Kollineationsachse und zur Fluchtlinie haben. Die Kegelschnitte in nicht durch O gehenden Ebenen haben als Bild jene auf Kegeln des in Satz 6 genannten Systems liegende Kurven 4. Ordnung, die aus einem festen Punkt der Fokalachse dieses Systems (nämlich aus O) durch Kegel 2. Grades projiziert werden.

*

Man kann eine einfache Methode angeben, um aus dem Grundriß eines Objektes auf eine Ebene π_1 den Zentralriß seines Kegelreliefs aus S_2 auf π_1 zu ermitteln. Das Bild einer horizontalen (nicht durch O gehenden) Ebene π_1 ist ein Drehkegel $\bar{\pi}_1$ mit der Achse z, der durch $\bar{f} = [\bar{\varphi}\,\pi]$ und durch den Schnittkreis von π_1 mit α geht (Abb. 6). Bezeichnet man den Grundriß eines Punktes P auf die Ebene π_1 mit Q, so ist der auf derselben Seite von O wie Q gelegene Schnittpunkt $\bar{Q}$ des Strahles (OQ) mit $\bar{\pi}_1$ das Bild (1. Bild) von Q; da der vertikalen Geraden (PQ) die Gerade $(S_2\bar{Q})$ entspricht, so ist die Zentralprojektion $\bar{Q}^c$ des Punktes $\bar{Q}$ aus S_2 auf π_1 mit dem Zentralriß $\bar{P}^c$ des Punktes $\bar{P}$ identisch.

Um also den Zentralriß des Kegelreliefs aus S_2 auf eine horizontale (nicht durch O gehende) Ebene π_1 zu erhalten, projiziere man den in

π_1 liegenden Grundriß des Objektes aus O auf den Drehkegel $\bar{\pi}_1$; der Zentralriß dieser Projektion aus S_2 auf π_1 ist der gesuchte Zentralriß des Reliefs.

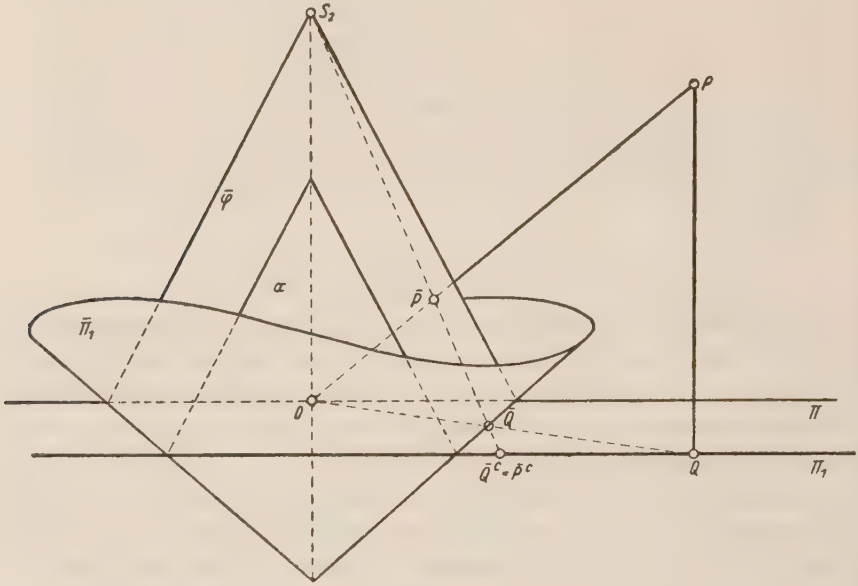


Abb. 6

Insbesondere findet man das Bild einer in π liegenden Geraden g nun einfach, indem man durch O und durch den Grundriß von g (auf π_1) eine Ebene legt und diese mit dem Kegel $\bar{\pi}_1$ zum Schnitt bringt; die Projektion der Schnittkurve aus S_2 auf π ist dann $\bar{g}$.

IV.

Eine Verallgemeinerung von III erhält man, wenn man als α und $\bar{\varphi}$ 2 kongruente Kegel 2. Grades mit gemeinsamer Fokalachse z wählt, die durch Parallelverschiebung in der Richtung von z auseinander hervorgehen, und auf z — in der Reihenfolge O, S_1, S_2 — das Auge O annimmt (Abb. 7). Diese Abbildungen IV führen zu den gleichen Bildsystemen wie die Abbildungen III, die individuelle Zuordnung ist verschieden.

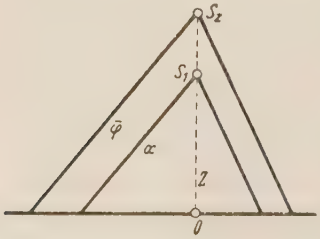


Abb. 7

Die Reduktion des gruppentheoretischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen.

Von
L. Rédei, Szeged.

(Eingelangt am 15. November 1948.)

Bezeichne G eine endliche Abelsche Gruppe mit dem Einselement 1. Griechische und große lateinische Buchstaben bezeichnen Elemente, bzw. Komplexe (d. h. Teilmengen) von G. Ein Produkt HK von zwei Komplexen $H = \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und $K = \beta_1, \ldots, \beta_s$ soll nur für den Fall erklärt sein, wenn alle $\alpha_i \beta_k$ verschieden sind, und dann soll HK aus allen $\alpha_i \beta_k$ bestehen. Einen speziellen Komplex

$$[\alpha]_e = 1, \alpha, \ldots, \alpha^{e-1} \qquad (e \geqq 2) \tag{1}$$

nennen wir ein (e-gliedriges) Simplex. Mit $O(x)$ bezeichnen wir die Ordnung von x, wobei x ein Element oder eine Untergruppe von G sein kann. Nur für

$$O(\alpha) \geqq e \tag{2}$$

hat (1) einen Sinn, da sonst die rechte Seite von (1) auch gleiche Elemente enthalten würde, was aber nicht sein kann. Dann und nur dann ist (1) eine Gruppe, wenn in (2) „=" gilt. Der wichtige Satz von *Hajós* lautet so:

In jeder „Simplexzerlegung" von G

$$G = [\alpha_1]_{e_1} \ldots [\alpha_n]_{e_n} \tag{3}$$

muß mindestens ein Faktor eine Gruppe sein.

Den Originalbeweis von *Hajós*[1] hat Verfasser[2] unlängst stark verkürzt. Wohl wurde hierdurch der Beweis sehr elegant und leichtverständlich, immer noch steckt aber in ihm etwas eigentümlich „geheimnisvolles", weswegen man gerne einen zweiten, mehr konstruktiven Beweis

---

[1] *G. Hajós*: Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. Math. Zeitschrift, **47** (1941), S. 427—467.

[2] *L. Rédei*: Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von *Hajós*, Comm. Math. Helv. (im Erscheinen).

hätte. Einen solchen zu Wege zu bringen ist mir nicht gelungen; ich fand bloß eine leichte Möglichkeit zur Reduktion des Satzes auf den Fall, in dem G eine p-Gruppe und sogar $e_1 = \ldots = e_n = p$ ist, wobei p eine Primzahl bezeichnet[3]. Wegen des großen Interesses des Hajós'schen Satzes möchte ich hier diese Reduktion ausführen, wobei mich auch die Hoffnung leitet, daß auf diesem Wege mit der Zeit ein neuer Beweis des Satzes entsteht.

Hilfssatz 1. Gilt $[\alpha]_e = [\beta]_f K$ *und ist* $[\beta]_f$ *eine Gruppe, so ist auch* $[\alpha]_e$ *eine Gruppe.*

Wegen $\beta\,[\beta]_f = [\beta]_f$ gilt nämlich $\beta\,[\alpha]_e = [\alpha]_e$. Hieraus und aus $\beta \neq 1$ folgt $\beta = \alpha^k$ $(o < k < e)$, und so muß $(\beta\,\alpha^{e-k} =)\ \alpha^e\ \varepsilon\ [\alpha]_e$ gelten. Dies ist nur mit $\alpha^e = 1$ verträglich, woraus Hilfssatz 2 folgt.

Hilfssatz 2. Ist der Satz von Hajós für Primzahlen $e_1, \ldots, e_n$ *richtig, so ist er allgemein richtig.*

Wegen $[\alpha]_{ef} = [\alpha]_e\,[\alpha^e]_f$ $(e, f \geqq 2)$ läßt sich nämlich in (3) jedes Simplex durch ein Produkt von Simplexen von der Form $[\beta]_p$ ersetzen. Wenn unter diesen eine Gruppe vorkommt, so muß nach Hilfssatz 1 auch unter den Faktoren in (3) eine Gruppe vorkommen, und so ist Hilfssatz 2 richtig.

Hilfssatz 3. Gilt $G = [\alpha]_p K$, *so gilt auch* $G = [\alpha^k]_p K$ $(p \nmid k)$.

Wegen $\alpha\,G = G$ folgt aus der Annahme $\alpha\,[\alpha]_p K = [\alpha]_p K$, und so gilt $\alpha^p K = K$, also allgemeiner $\alpha^i K = \alpha^j K$ $(i \equiv j \bmod p)$. Da andererseits die Exponenten der in den $[\alpha]_p$ und $[\alpha^k]_p$ vorkommenden Potenzen von α dieselben Reste mod p ergeben, so ist Hilfssatz 3 richtig.

Hilfssatz 4. Gilt $G = [\alpha]_p K$, *so gilt* $p \mid O(\alpha)$.

Wäre nämlich $p \nmid O(\alpha)$, so ließe sich Hilfssatz 3 mit $k = O(\alpha)$ anwenden, das führt aber wegen $\alpha^k = 1$ zu einem falschen Resultat.

Bezeichne $\{K\}$ die durch die Elemente von K erzeugte Untergruppe von G. Wir beweisen den:

Hilfssatz 5. Gilt in (3) $O(\alpha_1) = e_1$, $n \geqq 2$, *so gilt für die Faktorgruppe* $G/\{\alpha_1\}$ *die Simplexzerlegung*

$$G/\{\alpha_1\} = [\alpha_2\,\{\alpha_1\}]_{e_1} \ldots [\alpha_n\,\{\alpha_1\}]_{e_n}. \tag{4}$$

Aus (3) folgt sofort, daß die ausmultiplizierte rechte Seite von (4) alle Elemente von $G/\{\alpha_1\}$ enthält. Andererseits ist wegen (3) $O(G/\{\alpha_1\}) =$

[3] Wesentlich hiervon ist bloß die Reduktion auf p-Gruppen, denn die Reduktion auf den Fall, in dem (G beliebig aber) die $e_1, \ldots, e_n$ Primzahlen sind, ist sehr leicht. Diese Reduktion kam auch in den Arbeiten [1]), [2]) vor und wird auch hier (s. Hilfssatz 2) ein unentbehrliches Hilfsmittel. Das Resultat beider Reduktionen läßt sich wie oben aussprechen.

$= e_2 \ldots e_n$, und so kann jedes Element von $G/\{\alpha_1\}$ bei dem Ausmultiplizieren der rechten Seite von (4) nur einmal auftreten, woraus Hilfssatz 5 folgt.

Bezeichne $O(\alpha/H)$ die Ordnung von α bezüglich H, d. h. die kleinste natürliche Zahl k mit $\alpha^k \varepsilon H$, wobei H eine Untergruppe von G sein soll.

Hilfssatz 6. Ist in (3) ein Faktor der rechten Seite eine Gruppe und gilt Hajós' Satz für alle Abelschen Gruppen ($\neq 1$) *von einer Ordnung* $< O(G)$, *so gilt mit passender Reihenfolge der Faktoren in (3)*:

$$O(\alpha_i/\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\}) = e_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

$$G/\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\} = [\alpha_{i+1}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}]_{e_{i+1}} \ldots [\alpha_n\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}]_{e_n} \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Wir können annehmen, daß eben $[\alpha_1]_{e_1}$ eine Gruppe ist. Das bedeutet $O(\alpha_1) = e_1$, d. h. das Bestehen von (5) für $i = 1$, woraus nach Hilfssatz 5 auch (6) für $i = 1$ folgt. Wir nehmen die Richtigkeit von (5), (6) für ein i ($1 \leqq i \leqq n - 2$) an. Aus (6) folgt wegen der Annahme, daß bei passender Reihenfolge der letzten $n - i$-Faktoren in (3) der erste Faktor in (6) eine Gruppe ist, d. h. (5) für $i + 1$ (statt i) gilt. Wegen dieses läßt sich nach Hilfssatz 5 aus (6) eine Simplexzerlegung der Faktorgruppe $G/\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}\}$ herleiten, die eben als (6) mit $i + 1$ (statt i) erscheint. Durch eine Induktion (von i auf $i + 1$) haben wir (5) und (6) für $i = 1, \ldots, n - 1$ bewiesen. Insbesondere für $i = n - 1$ ergibt (6) auch die Richtigkeit von (5) für $i = n$, womit Hilfssatz 6 bewiesen ist.

Wir nennen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ eine p-Folge, wenn

$$O(\alpha_i/\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\}) = p \quad (i = 1, \ldots, t) \tag{7}$$

gilt. Es ist klar, daß dann die

$$\alpha = \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_t^{k_t} \quad (k_i = o, \ldots, p - 1; i = 1, \ldots, t) \tag{8}$$

alle verschiedenen Elemente von $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ sind.

Hilfssatz 7. Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ ($t \geqq 2$) *eine p-Folge und gilt* $O(\alpha_i) \geqq p^2$ ($i = 2, \ldots, t$), *so kann man (8) im Fall* $\alpha \neq 1$ *auch in der Form schreiben*:

$$\alpha = \alpha_1^{l_1} \ldots \alpha_t^{l_t} \quad (p \nmid l_1; l_i = o \text{ oder } p \nmid l_i; i = 2, \ldots, t). \tag{9}$$

Wegen $\alpha \neq 1$ gibt es nämlich ein i mit $k_1 = \ldots = k_{i-1} = o$, $k_i \neq o$ ($1 \leqq i \leqq t$). Ist $i = 1$, so ist die Behauptung richtig. Im Fall $i \geqq 2$ nehmen wir den Spezialfall

$$\alpha_i^{-p} = \alpha_1^{k'_1} \ldots \alpha_{i-1}^{k'_{i-1}} \quad (\neq 1)$$

von (8) zu Hilfe, wodurch selbst (8) sich als

$$\alpha = (\alpha_1^{k'1} \ldots \alpha_{i-1}^{k'i-1})\ \alpha_i^{p+k_i}\ \alpha_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots \alpha_t^{k_t}$$

schreiben läßt. Da hier im eingeklammerten Produkt nicht alle Exponenten verschwinden, so läßt sich hierauf das vorige Verfahren anwenden, und so erscheint α nach genügenden Wiederholungen in der Form (9).

Nach diesen Vorbereitungen führen wir die oben ausgesprochene Reduktion des Satzes von *Hajós* aus. Nehmen wir hierzu an, daß der Satz im allgemeinen falsch, für den Fall $e_1 = \ldots = e_n = p$ von (3) aber richtig ist. Wir haben hieraus einen Widerspruch abzuleiten.

Nehmen wir deshalb in (3) an, daß kein Faktor der rechten Seite eine Gruppe ist, auch dürfen wir annehmen, daß *Hajós* Satz für die Gruppen von einer Ordnung $< O(G)$ richtig ist. Wegen Hilfssatz 2 dürfen wir annehmen, daß alle e_i Primzahlen sind, endlich dürfen wir nach den Hilfssätzen 3, 4 offenbar auch noch annehmen, daß jedes $O(\alpha_i)$ entweder eine Primzahlpotenz (aber keine Primzahl) oder das Produkt von zwei Primzahlen ist. Mit veränderter Bezeichnung erhält dann (3) nach Hilfssatz 4 die Form

$$G = [\alpha_1 \beta_1]_{p_1} \ldots [\alpha_n \beta_n]_{p_n} [\varrho_1]_{r_1} \ldots [\varrho\, v]_{r_v}, \tag{10}$$

$$O(\alpha_i) = p_i,\ O(\beta_i) = q_i \quad (p_i \neq q_i;\ i = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

$$O(\varrho_i) = r_i^2, r_i^3, \ldots \quad (i = 1, \ldots, v), \tag{12}$$

wobei p_i, q_i, r_i Primzahlen sind.

Wir zeigen, daß jeder Primfaktor p von $O(G)$ unter den p_i vorkommt, woraus auch $u \geqq 2$ folgt. Wäre nämlich p von allen p_i verschieden, so bezeichnen wir mit p^k die größte Potenz von p in $O(G)$ $(k \geqq 1)$. Es muß genau k Faktoren in (10) mit $r_i = p$ geben. Ihr Produkt besteht dann aus p^k Elementen, die nach (12) von der Ordnung 1, p, p^2, ... sind, und so ist dieses Produkt eben die p-Sylowgruppe von G. Wegen der Annahme müßte ein Faktor eine Gruppe sein, dieser Widerspruch mit (12) beweist die Behauptung.

Unser weiteres Verfahren beruht auf der Bemerkung, daß (10) wegen (11) und des Hilfssatzes 3 offenbar auch dann richtig bleibt, wenn an die β_i beliebige Exponenten angefügt werden.

Insbesondere dürfen in (10) beliebige β_i gestrichen werden. So entsteht vor allem

$$G = [\alpha_1]_{p_1} \ldots [\alpha_n]_{p_n} [\varrho_1]_{r_1} \ldots [\varrho_v]_{r_v}, \tag{13}$$

wovon wir aber erst später Gebrauch machen werden.

Im folgenden sollen die ϱ_{ik} stets Elemente aus den $\varrho_1, \ldots, \varrho_v$ in (10) bezeichnen. Wir zeigen über (10) folgendes: *Zu jedem α_i gibt es eine p_i-Folge*

$$\alpha_i, \varrho_{i1}, \ldots, \varrho_{im_i} \tag{14}$$

und ein $\beta_{i'}$ mit

$$\beta_{i'} \varepsilon \{\alpha_i, \varrho_{i1}, \ldots, \varrho_{im_i}\} \quad (i' \neq i). \tag{15}$$

Da nämlich in (10) β_i gestrichen werden darf, so folgt wegen $O(\alpha_i) = p_i$ aus Hilfssatz 6, daß die

$$\alpha_1 \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1} \beta_{i+1}, \ldots, \alpha_n \beta_n, \varrho_1, \ldots, \varrho_v$$

sich in eine Folge

$$\alpha_i, \varrho_{i1}, \ldots, \varrho_{im_i}, \alpha_{i'} \beta_{i'}, \ldots$$

umordnen lassen, so daß jedes Glied $\alpha_j \beta_j$, bzw. ϱ_j die Ordnung p_j, bzw. r_j bezüglich der durch die davorstehenden Elemente erzeugten Gruppe hat. Aus (11), (12) folgt nacheinander, daß die ϱ_{ik} $(k = 1, \ldots, m_i)$ von einer Ordnung p_i^c $(c \geqq 2)$ sein müssen, und so ist (14) nach vorigem eine p_i-Folge, außerdem gilt

$$O(\alpha_{i'} \beta_{i'} / \{\alpha_i, \varrho_{i1}, \ldots, \varrho_{im_i}\}) = p_{i'}. \tag{16}$$

Andererseits gilt nach (11) $O(\alpha_{i'}) = p_{i'} \neq q_{i'} = O(\beta_{i'})$, und so folgt aus (14), (16) die Richtigkeit von (15).

Selbstverständlich braucht (14) durch das Anfangsglied α_i nicht eindeutig bestimmt zu sein, dagegen zeigen wir folgendes:

Liegt ein zweites Exemplar

$$\alpha_j, \varrho_{j1}, \ldots, \varrho_{jm_j} \quad (j \neq i) \tag{17}$$

von (14) vor, das also eine p_j-Folge ist, so haben (14), (17) kein gemeinsames Element. Denn nehmen wir an, daß ξ ein gemeinsames Element von (14) und (17) ist, und dabei sei ξ ein möglichst frühes Element von (14). Da (14) und (17) eine p_i-, bzw. p_j-Folge ist, so muß $p_i = p_j$ gelten (dies ist mit $i \neq j$ verträglich). Wegen $i \neq j$ folgt aus (13) offenbar $\{\alpha_i\} \neq \{\alpha_j\}$, andererseits sind in (14) und (17) wegen (12) nur die Anfangsglieder von Primzahlordnung, und so gilt $\xi \neq \alpha_i, \alpha_j$. Drücken wir nun ξ nach (8) auf zwei Arten als je ein Potenzprodukt der in (14), bzw. (17) vor ξ stehenden Elemente mit Exponenten $0, \ldots, p_i - 1$ aus. Beide Potenzprodukte sind Entwicklungsglieder von (13), und so folgt aus ihrer Gleichheit, daß sie, abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren, miteinander übereinstimmen. Da sie auch $\neq 1$ sind, so haben

wir bekommen, daß (14) und (17) auch schon vor ξ mindestens ein gemeinsames Element enthalten. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Wählen wir nunmehr ein α_i und eine zugehörige Folge (14) samt einem $\beta_{i'}$ in (15) fest. Wiederholen wir das mit $\alpha_{i'}$ (statt α_i), wobei dann ein $\beta_{i''}$ (statt $\beta_{i'}$) eintritt. Indem wir so weiterfahren, muß in der so entstehenden Indicesfolge $i, i', i'', \ldots$ ein erstes Glied geben, das wiederholt auftritt. Unser Verfahren dürfen wir mit diesem Index anfangen. Indem wir zugleich die Faktoren in (10) passend numerieren, so können wir folgendes Resultat aussprechen: *Das über (14), (15) Gesagte gilt für* $i = 1, \ldots, a\ (a \geqq 2)$, $i' = i + 1\ (i = 1, \ldots, a - 1)$, $a' = 1$ *mit einem* $a\ (\leqq n)$, *so daß dabei alle* $\varrho_{ix}\ (i = 1, \ldots, a;\ x = 1, \ldots, m_{i'})$ *verschieden sind.*

Wegen dieses gelten nach Hilfssatz 7 Gleichungen von der Form

$$\beta_{i'} = \alpha_i^{l_i}\, \varrho_{i1}^{l_{i_1}}\, \varrho_{i2}^{l_{i_2}} \ldots \quad (i = 1, \ldots, a) \tag{18}$$

(das Produkt rechts bricht mit einem Faktor ab), wobei die Exponenten entweder gleich 0 oder zu p_i prim sind und insbesondere letzteres für l_i stets gilt. Da wir die β_i in (10) mit beliebigen Exponenten versehen dürfen, so läßt sich in (18)

$$l_i = -1 \quad (i = 1, \ldots, a) \tag{19}$$

setzen. Ferner ist $O(\varrho_{ix})$ nach (15) eine Potenz von p_i, und so darf jedes ϱ_{ix} in (10) nach den Hilfssätzen 3, 4 beliebig mit einem zu p_i primen Exponenten versehen werden, das hat zur Folge, daß in (18) unbeschränkt

$$l_{ix} = 0 \text{ oder } -1 \tag{20}$$

gesetzt werden darf.

Betrachten wir

$$\alpha_1\, \beta_1\, \alpha_2\, \beta_2 \ldots \alpha_a\, \beta_a. \tag{21}$$

Dies ist nach (18), (19), (20) das Produkt einiger verschiedener ϱ_j^{-1}. Wird also (21) mit den entsprechenden ϱ_j multipliziert, so entsteht 1. Dies steht aber mit (10) in einem Widerspruch, denn kein Element kann mehr als einmal unter den Entwicklungsgliedern der rechten Seite auftreten. Damit haben wir die anfangs angemeldete Reduktion des Satzes von *Hajós* ausgeführt.

Über eine lineare Transformation in den Mengen der konvexen und der stützbaren Bereiche einer Ebene[1]

Von
Rudolf Inzinger, Wien.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 16. Februar 1949.)

1. Einleitung.

Wir betrachten im folgenden in einer Ebene Π konvexe Bereiche, die wir als abgeschlossen und beschränkt voraussetzen. Ist L der Umfang und F der Flächeninhalt eines solchen Bereiches $\mathfrak{H}$, dann gilt bekanntlich die sogenannte isoperimetrische Ungleichung

$$\Delta = L^2 - 4\pi F \geqq 0$$

in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann zutrifft, wenn $\mathfrak{H}$ von einem Kreis berandet wird. Die Kreisbereiche besitzen somit die kennzeichnende Eigenschaft unter allen konvexen Bereichen von gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt, bzw. bei gegebenem Flächeninhalt den kleinsten Umfang zu besitzen. Sie sind demnach die einzigen Lösungen der isoperimetrischen Aufgabe.

Zum Nachweis dafür, daß nicht kreisförmige Bereiche keine Lösungen der isoperimetrischen Aufgabe darstellen, bedient man sich gerne gewisser Deformationsverfahren, die es gestatten, aus jedem nicht kreisförmigen Bereich einen ebensolchen herzuleiten, der bei gleichem Flächeninhalt einen kleineren Umfang oder bei gleichem Umfang einen größeren Flächeninhalt besitzt. Beispiele für solche Deformationsverfahren sind die *Steiner*sche *Symmetrisierung* und das gleichfalls von *Steiner* angegebene *Viergelenkverfahren*. Durch jedes dieser beiden Beispiele und ähnliche Verfahren wird zwar gezeigt,

[1] Unter anderen Titeln und mit erweiterten Zielsetzungen habe ich darüber in den Vorträgen am 20. 1. 1939 und am 19. 11. 1948 in der Mathematischen Gesellschaft in Wien berichtet.

daß nicht kreisförmige Bereiche jedenfalls keine Lösungen der isoperimetrischen Aufgabe darstellen, doch wird die Frage der Existenz einer Lösung dieser Aufgabe durch sie zunächst nicht entschieden.

Im folgenden soll ein Deformationsverfahren T für konvexe ebene Bereiche besprochen werden, das sich von den angegebenen Beispielen und ähnlichen Verfahren vor allem dadurch unterscheidet, daß es eindeutig umkehrbar ist und daher mit Recht als eine Transformation in der Menge der konvexen Bereiche der Ebene Π betrachtet werden kann. Die Transformation T besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Die Transformation T ist linear, d. h. jede Linearschar konvexer Bereiche wird durch T in eine ebensolche transformiert.

2. Durch die Transformation T werden kongruente, ähnliche und parallele Bereiche in ebensolche übergeführt.

3. Jeder Kreisbereich ist gegenüber T invariant. Insbesondere sind auch die Punkte als ausgeartete Kreisbereiche gegenüber T invariant.

4. Jeder nicht kreisförmige Bereich $\mathfrak{H}^{(0)}$ wird durch T in einen ebensolchen und zu $\mathfrak{H}^{(0)}$ umfanggleichen Bereich $\mathfrak{H}^{(1)}$ übergeführt, der einen größeren Flächeninhalt als $\mathfrak{H}^{(0)}$ besitzt.

5. Entsprechende Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ stimmen im Krümmungsschwerpunkt S überein. Beide Bereiche werden daher durch den zu $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ umfanggleichen Kreis $\mathfrak{S}_1$ mit S als Mitte gleichzeitig im (quadratischen) Mittel am besten approximiert.

6. Aus einem nicht kreisförmigen Bereich $\mathfrak{H}^{(0)}$ entsteht durch unbegrenzt oftmalige Wiederholung der Transformation T eine Folge konvexer Bereiche $\mathfrak{H}^{(i)}$, die gleichmäßig gegen den gemeinsamen bestapproximierenden Kreis $\mathfrak{S}_1$ dieser Folge konvergiert.

7. Durch die Transformation T wird für nicht kreisförmige konvexe Bereiche:

a) der Inkreisradius vergrößert,

b) der Umkreisradius verkleinert,

c) die Dicke vergrößert,

d) der Durchmesser verkleinert,

e) die maximale Krümmung des Bereichsrandes verkleinert,

f) die minimale Krümmung des Bereichsrandes vergrößert.

8. Durch die Transformation T werden für einen konvexen Bereich die folgenden Anzahlen nicht vergrößert:

a) die Anzahl der Scheitel des Bereichsrandes,

b) die Anzahl der gemeinsamen Stützgeraden, sowie

c) die Anzahl der gemeinsamen Schnittpunkte des Bereichsrandes mit dem bestapproximierenden Kreis.

Die Transformation T ist von einem Parameter α abhängig, der im folgenden als Winkel gedeutet wird und der alle Werte des Intervalles $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ mit Ausschluß der Null annehmen kann. Das Verfahren konvergiert umso besser, je größer $|\alpha|$ ist. Für $\alpha = 0$ ergibt sich die Identität als eine Ausartung der Transformation T. Für sie sind die angegebenen Eigenschaften entweder in trivialer Weise oder überhaupt nicht erfüllt. Trotzdem werden wir die Identität gelegentlich in den Kreis unserer Betrachtungen einbeziehen.

Zur Herleitung der Transformation $T(\alpha)$ gehen wir zunächst von der in der Theorie der ebenen Kurven seit langem wohlbekannten *Evolventoidenbildung* aus, die sich bei geeigneter Abgrenzung des Definitionsbereiches gleichfalls als eine lineare Transformation $E(\alpha)$ in der Menge der konvexen Bereiche der Ebene Π erweist. Durch die Zusammensetzung von $E(\alpha)$ mit geeignet ausgewählten zentrischen Ähnlichkeiten, gewinnen wir sodann die Transformation $T(\alpha)$ mit den zuvor angegebenen Eigenschaften.

2. Stützbare Bereiche.

Zur Festlegung eines konvexen Bereiches $\mathfrak{H}$ in der Ebene Π, bedienen wir uns im folgenden seiner Stützgeradenfunktion $h(\varphi)$, die wir als periodisch mit der Periode 2π, sowie als stetig und mindestens abschnittsweise stetig differenzierbar voraussetzen. Es bedeutet dann h den vorzeichenbegabten Abstand eines Tangentialspeeres des orientiert gedachten Bereichsrandes vom Koordinatenursprung 0 und φ den modulo 2π bestimmten Winkel desselben gegen eine feste Nullrichtung 0. $h = h(\varphi)$ ist sodann die Gleichung des als Speermannigfaltigkeit aufgefaßten Bereichsrandes in den polaren Speerkoordinaten h, φ.

Für Bereiche mit zweimal differenzierbarer Stützgeradenfunktion wird der Forderung der Konvexität bekanntlich durch die Bedingung entsprochen, daß der Krümmungsradius

$$r(\varphi) = h(\varphi) + \ddot{h}(\varphi) \tag{1}$$

des Bereichsrandes im Intervall $[0, 2\pi]$ sein Zeichen nicht wechselt.

Im Verlaufe unserer Betrachtungen wird es sich zeigen, daß zur Definition der Transformationen $T(\alpha)$ und $E(\alpha)$ zwar die Existenz der Stützgeradenfunktion $h(\varphi)$ eines Bereiches vorausgesetzt werden muß, daß jedoch die Forderung der Konvexität des Bereiches dabei entbehrlich ist. Die Transformationen $T(\alpha)$ und $E(\alpha)$ sind daher auch auf die weit umfassendere Menge $\mathfrak{M}$ der sogenannten „*stützbaren Bereiche*" der Ebene Π anwendbar. Unter einem stützbaren Bereich wird dabei nach *H. Geppert*[2] ein solcher, nicht notwendig konvexer Bereich verstanden, der als Differenzbereich zweier konvexer Bereiche darstellbar ist und somit lediglich durch die Existenz einer Stützgeradenfunktion $h(\varphi)$ mit den zuvor erwähnten Eigenschaften gekennzeichnet ist.

In der Menge $\mathfrak{M}$ der stützbaren Bereiche sind sodann die *Addition* und die *Subtraktion* zueinander inverse und unbeschränkt ausführbare Bereichsverknüpfungen, denen die gleichen Verknüpfungen ihrer Stützgeradenfunktionen entsprechen. Wird der Ursprung 0 des Koordinatensystems als *Nullbereich* $\mathfrak{O}$ eingeführt, dann kann die *Multiplikation* $\lambda \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \lambda$ eines Bereiches $\mathfrak{H}$ mit einer reellen Zahl λ als eine λ-fache Streckung des Bereiches $\mathfrak{H}$ von 0 aus erklärt werden. In der Menge $\mathfrak{M}$ können dann nicht bloß positive, sondern beliebige Linearkombinationen stützbarer Bereiche betrachtet werden.

Sind $h(\varphi)$ und $g(\varphi)$ die Stützgeradenfunktionen zweier stützbarer Bereiche $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{M}$, dann wird ihr *Abstand*[3] $|\mathfrak{h}, \mathfrak{g}|$ durch

$$|\mathfrak{h}, \mathfrak{g}|^2 = \int_0^{2\pi} [h(\varphi) - g(\varphi)]^2 \, d\varphi$$

und ihr *Nachbarschaftsmaß*[3] $\overline{\mathfrak{H}, \mathfrak{G}}$ durch

$$\overline{\mathfrak{H}, \mathfrak{G}} = \sup |h(\varphi) - g(\varphi)| \tag{2}$$

erklärt. Beide Maßbestimmungen sind bekanntlich kommutativ und erfüllen die Dreiecksungleichung; insbesondere folgt aus $\overline{\mathfrak{H}, \mathfrak{G}} = 0$ und im Hinblick auf den enge gezogenen Kreis der zugelassenen Stützgeradenfunktionen auch aus $|\mathfrak{h}, \mathfrak{g}| = 0$, daß die Stützgeradenfunktionen beider Bereiche und damit diese selbst identisch sind.

3. Hypozykloidenbasis.

Von besonderem Interesse sind im folgenden die *Hypozykloidenbereiche* $\mathfrak{P}_\nu$ der *Klassen* $\mathfrak{K}_\nu$ mit den Stützgeradenfunktionen

---

[2] *H. Geppert*, Über den Brunn-Minkowskischen Satz, Math. Zeitschr. 42 (1937), p. 238—254.

[3] Zur besseren Unterscheidung der beiden Maßbestimmungen werden das eine Mal kleine und das andere Mal große Buchstaben verwendet.

$$p_0(\varphi) = \frac{a_0}{2},\ p_\nu(\varphi) = a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

die sich für $\nu = 0$ als die Kreise um 0 und für $\nu = 1$ als die Punkte der Ebene Π erweisen. Für $\nu > 1$ ergeben sich stützbare, jedoch nicht konvexe Bereiche, die von gemeinen *Hypozykloiden* begrenzt werden. Jede der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu \geqq 1)$ stellt eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit stützbarer Bereiche dar, die aus jedem derselben durch die zweiparametrige Gruppe der Drehstreckungen mit 0 als Zentrum erzeugt wird.

Den Bereichen $\mathfrak{P}_\nu$ einer jeden Klasse $\mathfrak{K}_\nu$ der *Hypozykloidenbasis* $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ kann man in eindeutiger Weise die Vektoren

$$\mathfrak{p}_0 = [\tfrac{a_0}{2}, 0],\ \mathfrak{p}_\nu = [a_\nu, b_\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

der Mannigfaltigkeiten Π_ν zuordnen. Gelegentlich wird es sich dabei als zweckmäßig erweisen, die Ebenen Π_ν $(\nu \geqq 1)$ und die Gerade Π_0 in der Ebene Π zu überlagern oder aber sie als paarweise orthogonale Koordinatenmannigfaltigkeiten eines *Hilbert*schen *Raumes* angeordnet zu denken.

Es liegt in der Natur der Sache, daß wir im folgenden von der Möglichkeit der Entwicklung der Stützgeradenfunktion $h(\varphi)$ eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ in ihre Fourier-Reihe

$$h(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\varphi) \tag{4}$$

Gebrauch machen. Wegen der Stetigkeit und der abschnittsweisen stetigen Differenzierbarkeit von $h(\varphi)$ konvergiert diese Reihe im ganzen Intervall $[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Die einzelnen Glieder dieser Reihe können wir nun als die Stützgeradenfunktionen von Hypozykloidenbereichen $\mathfrak{P}_\nu$ der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ betrachten und demgemäß den Bereich $\mathfrak{H}$ als Summe

$$\mathfrak{H} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu \tag{5}$$

seiner *hypozykloidischen Komponenten* $\mathfrak{P}_\nu$ ansehen[4]. Bedeutet $s_n(\varphi)$ die n-te Partialsumme der Reihe (4) und $\mathfrak{S}_n$ den zugehörigen Bereich, dann konvergiert die Bereichsfolge $\{\mathfrak{S}_n\}$ gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} \overline{\mathfrak{H} - \mathfrak{S}_n} = 0$

[4] Der Gedanke einen stützbaren Bereich als Summe seiner hypozykloidischen Komponenten zu betrachten, stammt von *H. Görtler*, vgl. Erzeugung stützbarer Bereiche I und II, Deutsche Math. 2 (1937), p. 454—465 und 3 (1938), p. 189—200.

und damit auch im quadratischen Mittel $\lim_{n \to \infty} |\, \mathfrak{h}, \mathfrak{s}_n \,| = 0$ gegen den Bereich $\mathfrak{H}$.

Werden die hypozykloidischen Komponenten $\mathfrak{P}_\nu$ des Bereiches $\mathfrak{H}$ durch ihre Bildvektoren $\mathfrak{p}_\nu$ in den Mannigfaltigkeiten Π_ν versinnlicht und diese in Π überlagert angeordnet, dann ergibt sich in Π als Bild von $\mathfrak{H}$ die Vektorfolge $\{\mathfrak{p}_\nu\}$; dagegen erweisen sich die Vektoren $\mathfrak{p}_\nu$ im *Hilbert*schen Raume als die Projektionen des Bildvektors $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{H}$ auf die Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν.

Für den absoluten Betrag $|\, \mathfrak{h} \,|$ des Vektors $\mathfrak{h}$ gilt bekanntlich

$$|\, \mathfrak{h} \,|^2 = \int_0^{2\pi} h^2(\varphi)\, d\varphi = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right]$$

oder

$$|\, \mathfrak{h} \,|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\, \mathfrak{h}_\nu \,|^2 \tag{6}$$

wenn

$$|\, \mathfrak{h}_0 \,|^2 = \pi \frac{a_0^2}{2}, \; |\, \mathfrak{h}_\nu \,|^2 = \pi\, (a_\nu^2 + b_\nu^2) \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

die absoluten Beträge der Komponenten $\mathfrak{P}_\nu$ von $\mathfrak{H}$ bedeuten.

Der Umfang L eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ ist durch

$$L = \int_0^{2\pi} h\, (\varphi)\, d\varphi$$

bestimmt, woraus sich wegen (4) und (3)

$$L = L_0 = \pi\, a_0 \tag{8}$$

ergibt. Es stimmt somit L mit dem Umfang L_0 der nullten Komponente $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{H}$, d. h. des an der Darstellung (5) beteiligten Kreises um 0 überein, während die Umfänge L_ν aller höheren Komponenten ($\nu \geqq 1$) von $\mathfrak{H}$ verschwinden.

Für den Flächeninhalt F des Bereiches $\mathfrak{H}$ gilt

$$F = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [h^2(\varphi) - \hbar^2(\varphi)]\, d\varphi$$

woraus wegen (4) und (3)

$$F = \frac{\pi}{4}\, a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)\, (a_\nu^2 + b_\nu^2)$$

folgt. Es sind sodann

$$F_0 = \frac{\pi}{4} a_0^2, F_1 = 0, F_\nu = -\frac{\pi}{2} (\nu^2 - 1)(a_\nu^2 + b_\nu^2) \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

die für $\nu > 1$ negativ ausfallenden Flächeninhalte der hypozykloidischen Komponenten $\mathfrak{P}_\nu$ von $\mathfrak{H}$, so daß

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu \tag{10}$$

gilt.

Während ein konvexer Bereich stets einen nicht negativen Flächeninhalt und bei entsprechender Orientierung auch einen ebensolchen Umfang besitzt, kann der Flächeninhalt und der Umfang eines stützbaren Bereiches sowohl positiv als auch negativ sein. Jede der beiden Größen kann überdies auch Null werden, ohne daß deshalb der Bereich in einen Punkt entartet. Für stützbare Bereiche kann auch ein (isoperimetrisches) Defizit Δ durch

$$\Delta = L^2 - 4\pi F \geqq 0$$

definiert werden für das

$$\Delta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu \tag{11}$$

gilt, wenn wegen $L_\nu = 0$ $(\nu \geqq 1)$

$$\Delta_0 = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_\nu = L_\nu^2 - 4\pi F_\nu = -4\pi F_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

als die Defizite der Komponenten $\mathfrak{P}_\nu$ von $\mathfrak{H}$ bezeichnet werden. Das Verschwinden des Defizites Δ eines stützbaren Bereiches kennzeichnet diesen in $\mathfrak{M}$ als Kreisbereich, jedoch nicht als Lösung der isoperimetrischen Aufgabe, da diese natürlich nur in der Menge der konvexen Bereiche sinnvoll ist. Die Kennzeichnung der Kreisbereiche in $\mathfrak{M}$ erfolgt vielmehr insofern, als $\Delta = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß sich die Stützgeradenfunktion $h(\varphi)$ als ein trigonometrisches Polynom erster Ordnung erweist.

Für einen stützbaren Bereich $\mathfrak{H}$, dessen Umfang L von Null verschieden ist, betrachten wir neben dem Defizit Δ noch das durch

$$\delta = \frac{4\pi F}{L^2} \leqq 1 \tag{13}$$

definierte *Rundungsmaß* δ sowie seinen *Defekt*

$$1 - \delta = \frac{\Delta}{L^2} \geqq 0. \tag{14}$$

Beide Größen stellen Maße für die Abweichung eines stützbaren Bereiches

von der Kreisform dar, die durch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (13) und (14) gekennzeichnet ist.

4. Evolutoiden und Evolventoiden.

Wir betrachten im folgenden in der Menge $\mathfrak{M}$ der stützbaren Bereiche der Ebene Π eine lineare Transformation $E(\alpha)$, aus der wir später die in der Einleitung erwähnte Transformation $T(\alpha)$ ableiten. Die Transformation $E(\alpha)$ ist insofern bemerkenswert, als ihr die in der Theorie der ebenen Kurven seit langem wohlbekannte *Evolutoidenbildung* zugrunde liegt.

Es sei $h^{(1)} = h^{(1)}(\varphi)$ die Gleichung einer orientierten Kurve k_1 in den polaren Speerkoordinaten h, φ und es sei weiters $P_1(x, y)$ ein Punkt von k_1, t_1

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = h^{(1)}(\varphi)$$

der Tangentialspeer von k_1 in P_1 und t_0

$$x \cos(\varphi - \alpha) + y \sin(\varphi - \alpha) = \cos \alpha \,.\, h^{(1)}(\varphi) - \sin \alpha \,.\, \dot{h}^{(1)}(\varphi) \qquad (15)$$

jener Speer der aus t_1 durch eine Drehung um P_1 durch den Winkel α im negativen Sinne entsteht. Bewegt sich nun P_1 auf k_1, dann umhüllen für festes α die Speere t_0 eine orientierte Kurve $k_0(\alpha)$, die man als *α-Evolutoide* von k_1 bezeichnet. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich die *Evolute* von k_1, während die Kurve k_1 selbst als ihre eigene Nullevolutoide aufgefaßt werden kann.

Für die Gleichung $h^{(0)} = h^{(0)}(\varphi)$ der Kurve k_0 ergibt sich aus (15) unmittelbar

$$\cos \alpha \,.\, h^{(1)}(\varphi) - \sin \alpha \,.\, \dot{h}^{(1)}(\varphi) = h^{(0)}(\varphi - \alpha). \qquad (16)$$

Bedient man sich daher in der üblichen Weise des Zeichens „D" für den Operator der Differentiation, dann folgt aus (16), wenn

$$\cos \alpha - D \sin \alpha = D(\alpha)$$

gesetzt wird

$$D(\alpha) * h^{(1)}(\varphi) = h^{(0)}(\varphi - \alpha),$$

sowie für die Evolutoidenbildung die symbolische Gleichung

$$D(\alpha) * k_1 = k_0.$$

Es entspricht somit der Anwendung des linearen Differentialoperators $D(\alpha)$ auf die Funktion $h^{(1)}(\varphi)$ geometrisch die α-Evolutoidenbildung an der entsprechenden Kurve k_1.

Geht man dagegen von der Kurve k_0 aus, dann ist die Kurve k_1 als eine *α-Evolventoide* von k_0 zu bezeichnen. Als Sonderfälle ergeben sich dabei für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die *Evolventen* von k_0, während die Kurve k_0 selbst als ihre eigene Nullevolventoide angesehen werden kann. Während zu einer Kurve k_1 für jeden Wert von α eine einzige α-Evolutoide k_0 gehört, bilden die zur Kurve k_0 gehörigen α-Evolventoiden eine einparametrige Kurvenschar, die durch die Lösungen der Differentialgleichung (16) bei gegebener Störungsfunktion $h^{(0)}(\varphi - \alpha)$ bestimmt ist. *Die Evolventoidenbildung ist daher ebenso wie die ihr entsprechende Umkehrung des Differentialoperators $D(\alpha)$ nicht eindeutig.* Trotzdem kann aber die Evolventoidenkonstruktion mit Vorteil zur graphischen Integration von inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auch höherer Ordnung verwendet werden, wenn die Anfangsbedingungen einer speziellen Lösung bekannt sind. Ich habe darüber an anderer Stelle ausführlich berichtet[5].

Die Umkehrung des Differentialoperators $D(\alpha)$ kann dadurch zu einer eindeutigen Funktionaloperation $E(\alpha)$ gemacht werden, indem man einerseits den Bereich der Parameterwerte α und andererseits den Bereich der Funktionen, bzw. Kurven auf die die inversen Operationen $E(\alpha)$ und $D(\alpha)$ ausgeübt werden sollen in geeigneter Weise begrenzt. *Dieses Ziel wird dadurch erreicht, daß man den Operationen $E(\alpha)$ und $D(\alpha)$ die Menge $\mathfrak{M}$ der stützbaren Bereiche der Ebene Π, bzw. die Mengen der Stützgeradenfunktionen und der Randkurven derselben als Definitionsbereiche zugrunde legt.*

Ist $\mathfrak{H}^{(1)}$ ein stützbarer Bereich, $h^{(1)}(\varphi)$ seine Stützgeradenfunktion und k_1 seine Randkurve, dann ist auch die durch (16) bestimmte α-Evolutoide k_0 von k_1 die Randkurve eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}^{(0)}$ mit $h^{(0)}(\varphi)$ als Stützgeradenfunktion. Ist umgekehrt der Bereich $\mathfrak{H}^{(0)}$ gegeben, dann gibt es in der Lösungsschar der Differentialgleichung (16) sicher dann eine und nur eine mit 2π periodische Lösung $h^{(1)}(\varphi)$, wenn $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt wird. *Unter den α-Evolventoiden einer geschlossenen Kurve gibt es daher eine einzige, die selbst auch geschlossen ist,* während alle anderen aperiodisch sind und sich in unendlich vielen Umläufen der Kurve k_1 asymptotisch nähern. Die vorliegende

[5] *R. Inzinger*, Zur graphischen Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Öst. Ing.-Arch. 1 (1947), p. 410—420.

Situation wird durch die Fig. 1 versinnlicht, die einen Kreis k_0 mit seinen offenen α-Evolventoiden und seiner einzigen geschlossenen α-Evolventoide k_1 zeigt, die selbst ein zu k_0 konzentrischer Kreis ist, dessen Radius zu dem von k_0 im Verhältnis $1 : \cos\alpha$ steht.

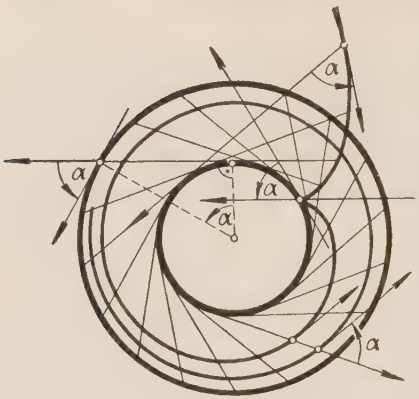


Abb. 1

Wir betrachten im folgenden lediglich die Evolventoidenbildungen $E(\alpha)$ für Parameterwerte $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$, da modulo π kongruente Parameterwerte Evolventoiden liefern, die sich lediglich in der Orientierung unterscheiden. Die Evolventenbildung $E(\frac{\pi}{2})$ bleibt ausgeschlossen, während $E(0)$ die Identität darstellt. Die Umkehrung $E^{-1}(\alpha)$ der Transformation $E(\alpha)$, die wir früher mit $D(\alpha)$ bezeichnet haben, wird jetzt gleichfalls nur für die Parameterwerte des Intervalls $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$ zugelassen. Es bleibt somit auch die Evolutenbildung $E^{-1}(\frac{\pi}{2})$ ausgeschlossen, während $E^{-1}(0)$ wieder die Identität darstellt. Nach dieser Abgrenzung der Menge der im folgenden zu betrachtenden Transformationen können wir nunmehr feststellen:

Die Evolventoidenbildung $E(\alpha)$ und die Evolutoidenbildung $E^{-1}(\alpha)$ sind eineindeutige und zueinander inverse lineare Transformationen in der Menge $\mathfrak{M}$ der stützbaren Bereiche der Ebene Π.

Sind $r^{(0)}(\varphi)$ und $r^{(1)}(\varphi)$ die durch (1) bestimmten Krümmungsradien der Randkurven k_0, k_1 zweier stützbarer Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$, die sich in den Transformationen $E(\alpha)$, bzw. $E^{-1}(\alpha)$ entsprechen, dann folgt aus (16)

$$\cos\alpha \cdot r^{(1)}(\varphi) - \sin\alpha \cdot \dot{r}^{(1)}(\varphi) = r^{(0)}(\varphi - \alpha) \qquad (17)$$

Es entsprechen sich somit auch die Funktionen $r^{(0)}(\varphi)$ und $r^{(1)}(\varphi)$ in den Transformationen $E(\alpha)$, bzw. $E^{-1}(\alpha)$.

Die *Breite* $B(\varphi) = B(\varphi + \pi)$ eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ in der Richtung φ ist bekanntlich durch

$$B(\varphi) = B(\varphi + \pi) = h(\varphi) + h(\varphi + \pi) \tag{18}$$

bestimmt. Aus (16) folgt daher, daß für die Breitenfunktionen $B^{(0)}(\varphi)$ und $B^{(1)}(\varphi)$ entsprechender Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ gleichfalls die Bezeichnung

$$\cos\alpha \cdot B^{(1)}(\varphi) - \sin\alpha \cdot B^{(1)}(\varphi) = B^{(0)}(\varphi - \alpha) \tag{19}$$

gilt.

5. Integraldarstellung der Transformation E (α).

Um zu einer expliziten Darstellung der Transformation $E(\alpha)$ zu gelangen, ersetzen wir in (16) zunächst φ durch $\varphi + \lambda$. Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ergibt sich sodann durch Multiplikation mit $e^{-\lambda \cot\alpha}$ und Integration

$$\cos\alpha \cdot \int_0^\infty h^{(1)}(\varphi+\lambda)\, e^{-\lambda\cot\alpha}\, d\lambda - \sin\alpha \int_0^\infty h^{(1)}(\varphi+\lambda)\, e^{-\lambda\cot\alpha}\, d\lambda = \int_0^\infty h^{(0)}(\varphi - \alpha + \lambda)\, e^{-\lambda\cot\alpha}\, d\lambda.$$

Wird nunmehr der zweite Summand der linken Seite durch partielle Integration umgeformt, so ergibt sich für die Transformation $E(\alpha)$ die Integraldarstellung

$$h^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{\sin\alpha} \int_0^\infty h^{(0)}(\varphi - \alpha + \lambda)\, e^{-\lambda\cot\alpha}\, d\lambda \tag{20}$$

die im Falle $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ durch

$$h^{(1)}(\varphi) = \frac{-1}{\sin\alpha} \int_0^\infty h^{(0)}(\varphi - \alpha - \lambda)\, e^{+\lambda\cot\alpha}\, d\lambda$$

zu ersetzen ist. Für $\alpha = 0$ versagen zunächst beide Darstellungen, doch kann man leicht zeigen, daß $E(0)$ die Identität ergibt. Aus (20) folgt nämlich durch partielle Integration

$$h^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot h^{(0)}(\varphi - \alpha) + \frac{1}{\cos\alpha} \int_0^\infty h^{(0)}(\varphi - \alpha + \lambda)\, e^{-\lambda\cot\alpha}\, d\lambda$$

woraus für $\alpha = o$ unmittelbar $h^{(1)}(\varphi) = h^{(0)}(\varphi)$ folgt.

Im folgenden soll lediglich der Fall $o < \alpha < \frac{\pi}{2}$ weiter behandelt werden, da sich für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < o$ nichts wesentlich Neues ergibt. Die

Zerlegung des unendlichen Integrationsintervalles in Teilintervalle von der Länge 2π ergibt sodann für $E(\alpha)$ die Darstellung

$$h^{(1)}(\varphi) = I(\alpha) \int_0^{2\pi} h^{(0)}(\varphi - \alpha + \lambda)\, e^{-\lambda \cot \alpha}\, d\lambda \tag{21}$$

in der

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \,[1 - e^{-2\pi \cot \alpha}]} \tag{22}$$

bedeutet.

Aus den Integraldarstellungen (20) und (21) entnimmt man zunächst, daß $E(\alpha)$ tatsächlich eine lineare Transformation in der Menge $\mathfrak{M}$ der stürzbaren Bereiche der Ebene Π ist, da sie die für eine solche Transformation kennzeichnenden Eigenschaften 1—3 besitzt.

1. Es ist dann und nur dann $h^{(1)}(\varphi) \equiv 0$, wenn $h^{(0)}(\varphi) \equiv 0$ gilt. *Der Ursprung* 0 *aufgefaßt als Nullbereich* $\mathfrak{O}$ *ist somit gegenüber* $E(\alpha)$ *invariant,* $E(\alpha) * \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$.

2. *Die Transformation* $E(\alpha)$ *ist mit der skalaren Multiplikation eines stützbaren Bereiches vertauschbar,* $E(\alpha) * [\mathrm{c}.\, \mathfrak{H}] = \mathrm{c}.\, [E(\alpha) * \mathfrak{H}]$. Durch $E(\alpha)$ werden somit ähnliche und bezüglich 0 ähnlich gelegene Bereiche in ebensolche transformiert.

3. *Die Transformation* $E(\alpha)$ *ist mit der Bereichsaddition vertauschbar,* $E(\alpha) * [\mathfrak{H} + \mathfrak{G}] = [E(\alpha) * \mathfrak{H}] + [E(\alpha) * \mathfrak{G}]$. Im Verein mit 2 folgt daraus unmittelbar, daß $E(\alpha)$ auch mit beliebigen Linearkombinationen stützbarer Bereiche vertauschbar ist.

4. Darüber hinaus stellt man unmittelbar fest, daß die Transformation $E(\alpha)$ auch mit den Drehungen um 0 vertauschbar ist, da (20) und (21) die Substitutionen $\varphi \to \varphi + \gamma$ gestatten. Die Transformation $E(\alpha)$ ist daher auch mit der Gruppe der Drehstreckungen mit 0 als Zentrum vertauschbar.

5. Stehen die Stützgeradenfunktionen $h^{(0)}(\varphi)$ und $g^{(0)}(\varphi)$ zweier stützbarer Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{G}^{(0)}$ in der Beziehung

$$h^{(0)}(\varphi) \leqq g^{(0)}(\varphi) \tag{23}$$

dann wird $\mathfrak{H}^{(0)}$ als *Teilbereich* von $\mathfrak{G}^{(0)}$ bezeichnet. Aus (20) folgt sodann für die Stützgeradenfunktionen $h^{(1)}(\varphi)$ und $g^{(1)}(\varphi)$ der transformierten Bereiche $\mathfrak{H}^{(1)}$, $\mathfrak{G}^{(1)}$

$$h^{(1)}(\varphi) \leqq g^{(1)}(\varphi) \tag{24}$$

Es ist somit auch $\mathfrak{H}^{(1)}$ ein Teilbereich von $\mathfrak{G}^{(1)}$. *Die Transformation* $E(\alpha)$ *erhält somit die durch die Ungleichung* (23) *ausgedrückte Ordnungsbeziehung der stützbaren Bereiche.* Für die Umkehrung $E^{-1}(\alpha)$ von $E(\alpha)$ gilt diese Aussage offensichtlich nicht. Es ist jedoch zu beachten, daß in (24) das Gleichheitszeichen als Folge von (23) dann und nur dann, und zwar in trivialer Weise im ganzen Intervall $[o, 2\pi]$ gilt, wenn dies für (23) der Fall ist und demnach $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{G}^{(0)}$, sowie $\mathfrak{H}^{(1)}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ identische Bereiche sind. Im folgenden soll daher die Ordnungsbeziehung stets in nicht trivialer Weise, also unter Ausschluß der Identität verstanden werden. *Sind die Bereiche* $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{G}^{(0)}$ *verschieden, dann besitzen somit die transformierten Bereiche* $\mathfrak{H}^{(1)}$, $\mathfrak{G}^{(1)}$ *selbst dann keine gemeinsame Stützgerade, wenn dies für die Bereiche* $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{G}^{(0)}$ *der Fall ist.*

6. Aus (20) folgt für

$$m \leqq h^{(0)}(\varphi) \leqq M$$

offensichtlich

$$\frac{1}{\cos\alpha} \cdot m < h^{(1)}(\varphi) < \frac{1}{\cos\alpha} \cdot M \tag{25}$$

Für $M = 0$, bzw. $m = 0$ ist darin enthalten, daß aus

$$h^{(0)}(\varphi) \leqq o, \text{ bzw. } h^{(0)}(\varphi) \geqq o$$

stets auch

$$h^{(1)}(\varphi) < o, \text{ bzw. } h^{(1)}(\varphi) > o$$

folgt. Dieselben Ungleichungen bestehen sodann wegen (17) auch für die Krümmungsradien $r^{(0)}(\varphi)$, $r^{(1)}(\varphi)$ der Randkurven entsprechender Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$. *Durch* $E(\alpha)$ *werden somit konvexe Bereiche in ebensolche transformiert.*

7. Für $M = h^{(0)}_{\text{Max}}$ und $m = h^{(0)}_{\text{Min}}$ folgt aus (25)

$$\frac{1}{\cos\alpha} \cdot h^{(0)}_{\text{Min}} < h^{(1)}(\varphi) < \frac{1}{\cos\alpha} \cdot h^{(0)}_{\text{Max}}$$

und daraus somit

$$h^{(1)}_{\text{Min}} > \frac{1}{\cos\alpha} h^{(0)}_{\text{Min}}, \quad h^{(1)}_{\text{Max}} < \frac{1}{\cos\alpha} h^{(0)}_{\text{Max}},$$

sowie für die extremalen Krümmungsradien der Randkurven entsprechender Bereiche

$$r^{(1)}_{\text{Min}} > \frac{1}{\cos\alpha} r^{(0)}_{\text{Min}}, \quad r^{(1)}_{\text{Max}} < \frac{1}{\cos\alpha} r^{(0)}_{\text{Max}}. \tag{26}$$

Die maximale Breite eines Bereiches bezeichnet man bekanntlich als den *Durchmesser* desselben, während die minimale Breite als die *Dicke* des Bereiches bezeichnet wird. Aus (19) folgt sodann, daß für die Durchmesser und die Dicken entsprechender Bereiche die Beziehungen

$$B_{\text{Min}}^{(1)} > \frac{1}{\cos\alpha} B_{\text{Min}}^{(0)},\ B_{\text{Max}}^{(1)} < \frac{1}{\cos\alpha} B_{\text{Max}}^{(0)} \tag{27}$$

bestehen.

8. Für die Nachbarschaftsmaße $\overline{\mathfrak{H}^{(0)}\,\mathfrak{G}^{(0)}}$ und $\overline{\mathfrak{H}^{(1)}\,\mathfrak{G}^{(1)}}$ entsprechender Bereichspaare $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{G}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$, $\mathfrak{G}^{(1)}$ folgt aus (20) unmittelbar

$$\overline{\mathfrak{H}^{(1)}\,\mathfrak{G}^{(1)}} < \frac{1}{\cos\alpha}\ \overline{\mathfrak{H}^{(0)}\,\mathfrak{G}^{(0)}}$$

Durch $E(\alpha)$ wird somit jede gleichmäßig konvergente Bereichsfolge in eine ebensolche transformiert.

9. Aus (20) folgt weiters, daß jede der Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ der Hypozykloidenbasis $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ gegenüber $E(\alpha)$ invariant ist. Sind daher $\mathfrak{H}^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^{(1)}$ die Komponentenzerlegungen entsprechender Bereiche, dann folgt aus 8, daß sich die Komponenten $\mathfrak{P}_\nu^{(0)}$, $\mathfrak{P}_\nu^{(1)}$ aus gleichen Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ in $E(\alpha)$ entsprechen. *Die Transformation $E(\alpha)$ eines stützbaren Bereiches kann somit gliedweise an seinen hypozykloidischen Komponenten erfolgen.*

6. Transformation der Kreisbereiche.

Wir untersuchen zunächst, in welcher Weise die Kreisbereiche der Ebene Π durch $E(\alpha)$ transformiert werden.

1. Für die Klasse $\mathfrak{K}_0$ der Kreise mit 0 als Mitte folgt aus (20)

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot a^{(0)} \tag{28}$$

In $\mathfrak{K}^0$ bewirkt somit $E(\alpha)$ eine Streckung mit 0 als Zentrum und dem Streckungsverhältnis $1 : \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

In der Komponentenzerlegung eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ stellt die nullte Komponente $\mathfrak{P}_0$ bekanntlich den mit $\mathfrak{H}$ umfanggleichen Kreis um 0 dar. Aus (8) folgt daher, daß für die Umfänge $L^{(0)}$, $L^{(1)}$ entsprechender Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$

$$L^{(1)} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot L^{(0)} \tag{29}$$

gilt.

2. Zwei Bereiche $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ werden bekanntlich als *Parallelbereiche* bezeichnet, wenn ihr Differenzbereich $\mathfrak{H}-\mathfrak{G}$ der Klasse $\mathfrak{K}_0$ angehört. *Aus* 1 *folgt daher, daß durch* $E(\alpha)$ *Parallelbereiche in ebensolche transformiert werden.* Ihr Abstand wird dabei nach (28) im Verhältnis $1 : \frac{1}{\cos \alpha}$ vergrößert.

3. Ein Bereich wird bekanntlich als solcher von *konstanter Breite* bezeichnet, wenn seine Breitenfunktion (18) konstant ist. *Aus* 1 *und* (19) *folgt daher, daß durch* $E(\alpha)$ *Bereiche konstanter Breite in ebensolche transformiert werden.* Die Breite wird dabei im Verhältnis $1 : \frac{1}{\cos \alpha}$ vergrößert.

4. Für die Klasse $\mathfrak{K}_1$ der Punkte der Ebene Π folgt aus (20)

$$a_1^{(1)} = a_1^{(0)},\ b_1^{(1)} = b_1^{(0)} \tag{30}$$

In $\mathfrak{K}_1$ *stellt somit* $E(\alpha)$ *für jeden Wert von* α *die Identität dar.* Damit steht in Übereinstimmung, daß wegen **5**,1 aus $r^{(0)}(\varphi) \equiv 0$ stets auch $r^{(1)}(\varphi) \equiv 0$ folgt.

In der Komponentenzerlegung eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ stellt die erste Komponente $\mathfrak{P}_1$ bekanntlich den *Steiner*schen *Krümmungsschwerpunkt* von $\mathfrak{H}$ dar. Aus (30) folgt somit, daß *entsprechende Bereiche* $\mathfrak{H}^{(0)}$ *und* $\mathfrak{H}^{(1)}$ *im Krümmungsschwerpunkt übereinstimmen.*

5. Zwei Bereiche $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ entsprechen sich bekanntlich in einer Schiebung, wenn ihr Differenzenbereich $\mathfrak{H}-\mathfrak{G}$ der Klasse $\mathfrak{K}_1$ angehört. Aus 4 folgt daher, daß *die Transformation* $E(\alpha)$ *mit der Gruppe der Schiebungen vertauschbar ist.* Wegen **5**,4 ist daher $E(\alpha)$ *auch mit der Gruppe der Bewegungen und der Gruppe der gleichsinnigen Ähnlichkeiten vertauschbar.*

6. Jeder Kreisbereich $\mathfrak{S}_1$ der Ebene Π ist die Summe $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1$ je eines Bereiches aus $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$. *Durch* $E(\alpha)$ *wird daher jeder Kreisbereich* $\mathfrak{S}_1^{(0)}$ *in einen dazu konzentrischen* $\mathfrak{S}_1^{(1)}$ *transformiert.* Damit steht in Übereinstimmung, daß aus $r^{(0)}(\varphi) = \text{konst.}$ stets auch $r^{(1)}(\varphi) = \text{konst.}$ und $r^{(0)} : r^{(1)} = 1 : \frac{1}{\cos \alpha}$ folgt.

In der Komponentenzerlegung eines stützbaren Bereiches $\mathfrak{H}$ stellt die erste Partialsumme $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1$ bekanntlich jenen Kreisbereich

dar, der den Bereich $\mathfrak{H}$ im quadratischen Mittel am besten approximiert. *In $E(\alpha)$ entsprechen sich somit neben den Bereichen $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ auch deren bestapproximierende Kreise $\mathfrak{S}_1^{(0)}$, $\mathfrak{S}_1^{(1)}$.*

7. Ist $\mathfrak{H}^{(0)}$ ein nicht kreisförmiger Bereich, dann wird ein Kreisbereich $\mathfrak{S}_1^{(0)}$ als $\mathfrak{H}^{(0)}$ *ein-, bzw. umgeschrieben* bezeichnet, wenn im Sinne von 5,5 $\mathfrak{S}_1^{(0)}$ ein Teilbereich von $\mathfrak{H}^{(0)}$, bzw. $\mathfrak{H}^{(0)}$ ein Teilbereich von $\mathfrak{S}_1^{(0)}$ ist. Als *In-, bzw. Umkreise* von $\mathfrak{H}^{(0)}$ bezeichnet man sodann die $\mathfrak{H}^{(0)}$ ein-, bzw. umgeschriebenen Kreise mit maximalem, bzw. minimalem Radius. Aus 6,6 folgt nun im Verein mit 5,5 daß durch $E(\alpha)$ jeder $\mathfrak{H}^{(0)}$ ein-, bzw. umgeschriebene Kreis und damit auch die In-, bzw. Umkreise von $\mathfrak{H}^{(0)}$ in solche Kreise transformiert werden, die dem entsprechenden Bereich $\mathfrak{H}^{(1)}$ ein-, bzw. umgeschrieben sind. Nach 5,5 besitzen jedoch die den In-, bzw. Umkreisen von $\mathfrak{H}^{(0)}$ entsprechenden Kreise mit dem transformierten Bereich $\mathfrak{H}^{(1)}$ keine gemeinsame Stützgerade, so daß sie selbst nicht In-, bzw. Umkreise von $\mathfrak{H}^{(1)}$ sind. Für die Radien $R_i^{(0)}$, $R_u^{(0)}$, bzw. $R_i^{(1)}$, $R_u^{(1)}$ der In-, bzw. Umkreise entsprechender nicht kreisförmiger Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ gilt daher

$$R_i^{(1)} > \frac{1}{\cos\alpha}\, R_i^{(0)}, \quad R_u^{(1)} < \frac{1}{\cos\alpha}\, R_u^{(0)} \tag{31}$$

7. Transformation der Hypozykloidenbasis.

Wir untersuchen im folgenden, wie durch $E(\alpha)$ die Stützgeradenfunktionen $p_\nu^{(0)}(\varphi)$, $p_\nu^{(1)}(\varphi)$ entsprechender Bereiche $\mathfrak{P}_\nu^{(0)}$, $\mathfrak{P}_\nu^{(1)}$ einer beliebigen Klasse $\mathfrak{R}_\nu$ transformiert werden.

1. Aus (20) folgt für entsprechende Bereiche $\mathfrak{P}_\nu^{(0)}$, $\mathfrak{P}_\nu^{(1)}$

$$\begin{aligned} a_\nu^{(1)} &= c_\nu\,[a_\nu^{(0)} \cos \nu\,.\,\beta_\nu + b_\nu^{(0)} \sin \nu\,.\,\beta_\nu] \\ b_\nu^{(1)} &= c_\nu\,[-a_\nu^{(0)} \sin \nu\,.\,\beta_\nu + b_\nu^{(0)} \cos \nu\,.\,\beta_\nu] \end{aligned} \tag{32}$$

wobei

$$\begin{aligned} \nu\,.\,\beta_\nu &= \alpha_\nu - \nu\,.\,\alpha, \\ \alpha_\nu &= \operatorname{arc\,tg}(\nu\,.\,\operatorname{tg}\alpha), \end{aligned} \tag{33}$$

bedeutet und $c_\nu^2 = \dfrac{\cos^2\alpha\,\nu}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha + \nu^2 \sin^2\alpha}$

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_{\nu-1} < \alpha_\nu \to \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\alpha_0 = 1,\ \cos\alpha_1 = \cos\alpha,\ \cos\alpha_{\nu-1} > \cos\alpha_\nu \to 0$$

$$c_0 = \frac{1}{\cos\alpha},\ c_1 = 1,\ \ c_{\nu-1} > c_\nu \to 0$$

gilt. Für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ ergeben sich somit die in **6** besprochenen Sonderfälle. Die Größen α_ν, c_ν und $I(\alpha)$ (22) sind überdies bestimmt durch die Fourier-Reihe

$$e^{-\lambda \cot \alpha} = \frac{1}{\pi I(\alpha)} \left[\frac{1}{2 \cos \alpha} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot \cos(\nu \lambda - \alpha_\nu) \right]$$

der Funktion $e^{-\lambda \cot \alpha}$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

Aus (32) *entnimmt man nun, daß* $E(\alpha)$ *in jeder der Klassen* $\mathfrak{K}_\nu$ *eine Drehstreckung der Bereiche* $\mathfrak{P}_\nu$ *mit* c_ν *als Streckungsverhältnis und* β_ν *als Drehwinkel bewirkt.* Die Bildvektoren $\mathfrak{p}_\nu$ dieser Bereiche in den Mannigfaktigkeiten Π_ν erfahren dagegen Drehstreckungen mit dem gleichen Streckungsverhältnis, jedoch mit dem Drehwinkel $\nu \cdot \beta_\nu$.

2. Aus (32) folgt nun für die absoluten Beträge (7) der Bildvektoren $\mathfrak{p}_\nu^{(0)}$, $\mathfrak{p}_\nu^{(1)}$ sowie für die Flächeninhalte (9) und die Defizite (12) entsprechender Bereiche $\mathfrak{P}_\nu^{(0)}$, $\mathfrak{P}_\nu^{(1)}$ aus $\mathfrak{K}_\nu$

$$|\mathfrak{p}_\nu^{(1)}| = c_\nu \cdot |\mathfrak{p}_\nu^{(0)}|, F^{(1)} = c_\nu^2 F_\nu^{(0)}, \Delta_\nu^{(1)} = c_\nu^2 \Delta_\nu^{(0)}. \tag{34}$$

Aus (6), (10), (11) folgt somit für entsprechende Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$

$$\text{a) } |\mathfrak{h}^{(1)}| \leqq c_j |\mathfrak{h}^{(0)}|, \quad \text{b) } F^{(1)} \geqq c_m^2 F^{(0)}, \quad \text{c) } \Delta^{(1)} \leqq c_n^2 \Delta^{(0)} \tag{35}$$

wenn j, m, n die niedrigsten Indizes sind, für die die Anteile (34) der Komponenten von $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ an diesen Größen nicht verschwinden. In sämtlichen Ungleichungen gilt dabei das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Anteile (34) aller Komponenten für $\nu > j$, $\nu > m$, $\nu > n > 2$ verschwinden.

3. Für Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ die eine Komponente aus $\mathfrak{K}_0$ enthalten und deren Umfänge $L^{(0)}$, $L^{(1)}$ demnach nicht verschwinden, gilt sodann wegen $j = m = 0$, $n = 2$

$$\text{a) } |\mathfrak{h}^{(1)}| \leqq \frac{1}{\cos \alpha} |\mathfrak{h}^{(0)}|, \quad \text{b) } F^{(1)} \geqq \frac{1}{\cos^2 \alpha} F^{(0)}, \quad \text{c) } \Delta^{(1)} \leqq c_2^2 \Delta^{(0)} \tag{36}$$

In a) gilt dabei das Gleichheitszeichen für Kreisbereiche aus $\mathfrak{K}_0$ und nur für diese, während in b) das Gleichheitszeichen wegen $F_1^{(0)} = F_1^{(1)} = 0$ für beliebige Kreisbereiche und nur für diese zutrifft. Für solche wird dann c) wegen $\Delta^{(0)} = \Delta^{(1)} = 0$ trivial.

Aus (29) *und* (36, *b*) *folgt, daß durch* $E(\alpha)$ *für nicht kreisförmige Bereiche* $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ *das Rundungsmaß* (13) *stets vergrößert wird*

$$\delta^{(0)} \leqq \delta^{(1)} \leqq 1,$$

da hier die Gleichheitszeichen nur gleichzeitig, und zwar nur für Kreisbereiche gelten.

4. Die Ungleichung (36, c) drückt aus, daß durch $E(\alpha)$ das Defizit nicht kreisförmiger Bereiche verkleinert wird. Dieses Ergebnis war durchaus nicht zu erwarten und folgt auch nicht aus dem Umstand, daß durch $E(\alpha)$ das Rundungsmaß vergrößert wird. Von den Bereichen $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ ist zwar $\mathfrak{H}^{(1)}$ „kreisähnlicher" als $\mathfrak{H}^{(0)}$, doch besitzt $\mathfrak{H}^{(1)}$ sowohl einen größeren Umfang als auch einen größeren Flächeninhalt als $\mathfrak{H}^{(0)}$, so daß das Defizit $\Delta^{(1)}$ von $\mathfrak{H}^{(1)}$ durchaus größer sein könnte, als das $\Delta^{(0)}$ von $\mathfrak{H}^{(0)}$. Der Umstand, daß dies nicht der Fall ist, beweist die Wirksamkeit der Transformation $E(\alpha)$ und gestattet eine Abschätzung der Vergrößerung des Rundungsmaßes durch Vergleich der Defekte (14) von $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$. Aus (36, c) folgt bei Beachtung von (29)

$$(1 - \delta^{(1)})\, L^{(1)^2} \leqq c_2^2\, (1 - \delta^{(0)})\, L^{(0)^2}$$

und daraus wegen (33)

$$1 - \delta^{(1)} \leqq (1 - \delta^{(0)})\, \frac{c_2^2}{c_0^2} = (1 - \delta^{(0)})\, \frac{1}{1 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}. \tag{37}$$

Der Defekt eines Bereiches wird somit durch die Transformation $E(\alpha)$ *umso stärker verkleinert, je größer der Parameter* α *ist.* Für $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ergeben sich z. B. die Verkleinerungen auf mindestens $^3/_7$, $^1/_5$, $^1/_{13}$ des ursprünglichen Wertes. Für Bereiche, deren Komponenten aus $\mathfrak{K}_\nu$ für $1 < \nu < n$ verschwinden, kann sogar in (37) die Zahl 4 durch n^2 ersetzt werden.

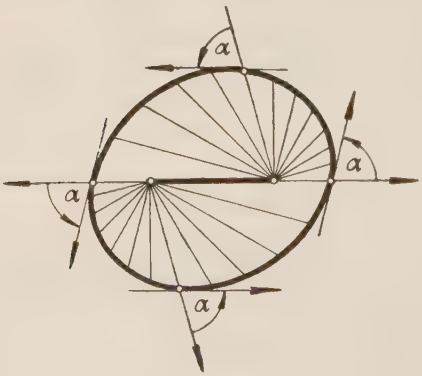


Abb. 2

5. Die beiden Figuren 2 und 3 versinnlichen die Wirksamkeit der Transformation $E(\alpha)$. In Fig. 2 wurde als Bereich $\mathfrak{H}^{(0)}$ eine Strecke gewählt. Als transformierter Bereich ergibt sich sodann ein konvexer Bereich $\mathfrak{H}^{(1)}$, der von zwei kongruenten Bögen zweier logarithmischer Spiralen begrenzt wird, die die Endpunkte der Strecke als

asymptotische Punkte besitzen. Die Fig. 3 zeigt dagegen einen nicht konvexen Bereich[6] $\mathfrak{H}^{(0)}$, der von zwei Halbkreisen und den gemeinsamen Tangenten derselben begrenzt wird. Der transformierte Bereich $\mathfrak{H}^{(1)}$ ist konvex und wird von zwei kongruenten Bögen offener Kreisevolventoiden begrenzt.

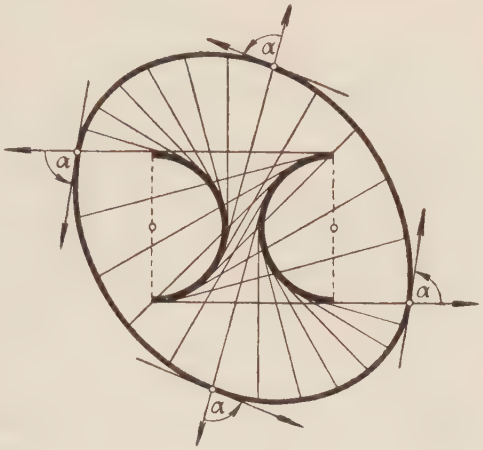


Abb. 3

6. Durch wiederholte Anwendung der Transformation $E(\alpha)$ ergibt sich aus einem Bereich $\mathfrak{H}^{(0)}$ die Folge $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ der Bereiche $\mathfrak{H}^{(i)}$, deren Defizite $\Delta^{(i)}$ wegen (35, c) eine monoton abnehmende Nullfolge $\Delta^{(i)} \searrow 0$ bilden. Man könnte dadurch verleitet werden anzunehmen, daß die Bereichsfolge $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ gegen einen Kreis konvergiert, doch überzeugt man sich leicht, daß dies für Bereiche, die eine Komponente aus $\mathfrak{K}_0$ enthalten, nicht der Fall ist, da die Umfänge $L^{(i)}$ wegen (29) eine monoton wachsende und nicht beschränkte Zahlenfolge durchlaufen.

Aus (34) entnimmt man, daß durch die Transformation $E(\alpha)$ wegen $c_0 = \dfrac{1}{\cos\alpha} > 1$, $c_1 = 1$, $c_\nu < 1$ $(\nu > 1)$ der Beitrag der nullten Komponente zum absoluten Betrag des Vektors $\mathfrak{h}$ vergrößert wird, der Beitrag der ersten Komponente ungeändert bleibt und die Beiträge der höheren Komponenten $(\nu > 1)$ verkleinert werden ,und zwar dies um so mehr, je größer der Index der Klasse ist. Da somit die nullten Komponenten nicht beschränkt bleiben, kann eine Konvergenz der Bereichsfolge $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ nicht in Frage kommen. *Die Bereiche $\mathfrak{H}^{(i)}$ der Folge $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ werden mit wachsendem i zwar immer „kreisähnlicher", doch bleiben sie nicht beschränkt.* Verschwinden jedoch die Bereichsumfänge $L^{(i)} = 0$, dann konvergiert die Bereichsfolge $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ gegen den gemeinsamen Krümmungsschwerpunkt $\mathfrak{P}_1^{(1)}$ der Bereiche dieser Folge.

[6] Versehentlich wurden in Abb. 3 die gemeinsamen Tangenten der beiden Halbkreise dünn statt stark gezeichnet.

Diese Aussage ergibt sich als Sonderfall aus den folgenden Betrachtungen.

8. Bestapproximierender Kreis.

1. Wir untersuchen im folgenden wie sich die Transformation $E(\alpha)$ auf die gegenseitige Lage eines Bereiches $\mathfrak{H}^{(0)}$ zu seinem bestapproximierenden Kreis $\mathfrak{S}_1^{(0)}$ auswirkt. Der Differenzbereich $\mathfrak{H}^{(0)}-\mathfrak{S}_1^{(0)}$ enthält sodann weder eine Komponente aus $\mathfrak{K}_0$ noch eine solche aus $\mathfrak{K}_1$ und es gilt daher für ihn (35) für $j=m=n\geqq 2$. *Der Abstand* $|\mathfrak{h}^{(0)}-\mathfrak{s}_1^{(0)}|$ *eines Bereiches* $\mathfrak{H}^{(0)}$ *von seinem bestapproximierenden Kreis* $\mathfrak{S}_1^{(0)}$ *wird somit durch* $E(\alpha)$ *stets verkleinert.* Insbesondere gilt für die wiederholte Anwendung von $E(\alpha)$

$$|\mathfrak{h}^{(i)}-\mathfrak{s}_1^{(i)}| \leqq c_2^i\,|\mathfrak{h}^{(0)}-\mathfrak{s}_1^{(0)}|$$

woraus man entnimmt, daß für die Bereichsfolgen $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ und $\{\mathfrak{S}_1^{(i)}\}$ die Abstände $|\mathfrak{h}^{(i)}-\mathfrak{s}_1^{(i)}|$ eine monoton abnehmende Nullfolge $|\mathfrak{h}^{(i)}-\mathfrak{s}_1^{(i)}|\to 0$ durchlaufen. *Die wiederholte Anwendung der Transformation* $E(\alpha)$ *bewirkt somit für die Bereiche* $\mathfrak{H}^{(i)}$ *eine schrittweise Annäherung an ihre bestapproximierenden Kreise* $\mathfrak{S}_1^{(i)}$.

Verschwinden die Umfänge $L^{(i)}=0$ der Bereiche $\mathfrak{H}^{(i)}$, dann sind die bestapproximierenden Kreise $\mathfrak{S}_1^{(i)}$ in den gemeinsamen Krümmungsschwerpunkt $\mathfrak{P}_1^{(i)}$ entartet. Wegen der Invarianz von $\mathfrak{P}_1^{(i)}$ gegenüber $E(\alpha)$ konvergiert sodann die Bereichsfolge $\{\mathfrak{H}_1^{(i)}\}$ im quadratischen Mittel gegen $\mathfrak{P}_1^{(i)}$.

2. Wir zeigen nunmehr, daß die durch die wiederholte Ausübung der Transformation $E(\alpha)$ bewirkte Annäherung der Bereiche $\mathfrak{H}^{(i)}$ an ihre bestapproximierenden Kreise $\mathfrak{S}_1^{(i)}$ *gleichmäßig* erfolgt. Ist

$$h^{(1)}(\varphi)-s_1^{(1)}(\varphi)=\sum_{\nu=2}^{\infty}(a_\nu^{(1)}\cos\nu\varphi+b_\nu^{(1)}\sin\nu\varphi)$$

die Fourier-Reihe der Stützgeradenfunktion $h^{(1)}(\varphi)-s_1^{(1)}(\varphi)$ des Differenzbereiches $\mathfrak{H}^{(1)}-\mathfrak{S}_1^{(1)}$, dann folgt aus (32)

$$h^{(1)}(\varphi)-s_1^{(1)}(\varphi)=\sum_{\nu=2}^{\infty}c_\nu\,(a_\nu^{(0)}\cos\nu(\varphi+\beta_\nu)+b_\nu^{(0)}\sin\nu(\varphi+\beta_\nu)).$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Fourier-Reihe (4) der Stützgeradenfunktion $h^{(0)}(\varphi)$ von $\mathfrak{H}^{(0)}$ konvergiert sodann auch die Reihe

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}(|a_\nu^{(0)}|+|b_\nu^{(0)}|)<\infty$$

und es gilt

$$h^{(1)}(\varphi) - s_1^{(1)}(\varphi) \leqq c_2 \sum_{\nu=2}^{\infty} (|a_\nu^{(0)}| + |b_\nu^{(0)}|).$$

Daraus folgt aber für das Nachbarschaftsmaß (2) von $\mathfrak{H}^{(i)}$ und $\mathfrak{S}_1^{(i)}$

$$\overline{\mathfrak{H}^{(i)}\,\mathfrak{S}_1^{(i)}} \leqq c_2^i \sum_{\nu=2}^{\infty} (|a_\nu^{(0)}| + |b_\nu^{(0)}|),$$

woraus man wegen $c_2 < 1$ entnimmt, daß *die Annäherung von* $\mathfrak{H}^{(i)}$ *an* $\mathfrak{S}_1^{(i)}$ *im ganzen Intervall* $[0, 2\pi]$ *gleichmäßig erfolgt.*

3. Um die durch die Transformation $E(\alpha)$ bewirkte Annäherung eines Bereiches $\mathfrak{H}$ an seinen bestapproximierenden Kreis $\mathfrak{S}_1$ noch genauer zu kennzeichnen, vergleichen wir nunmehr die Anzahlen der relativen Extreme der Stützgeradenfunktionen $h^{(0)}(\varphi)$ und $h^{(1)}(\varphi)$ entsprechender Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$, wobei natürlich eine genügend oftmalige Differenzierbarkeit dieser Funktionen vorausgesetzt werden muß.

Aus der Differentialgleichung (16) folgt, daß zwischen zwei benachbarten relativen Extremen von $h^{(1)}(\varphi)$ mindestens ein Zeichenwechsel von $\dot{h}^{(0)}(\varphi)$ liegt und demnach $h^{(0)}(\varphi)$ mindestens ebenso viele relative Extreme als $h^{(1)}(\varphi)$ besitzt. *Durch die Transformation* $E(\alpha)$ *wird somit die Anzahl der relativen Extreme einer Stützgeradenfunktion nicht vergrößert.*

Ebenso folgt aus der Differentialgleichung (16), daß *durch* $E(\alpha)$ *die Anzahl der Nullstellen einer Stützgeradenfunktion nicht vergrößert wird.*

Wird diese letzte Aussage auf die Stützgeradenfunktion des Differenzbereiches $\mathfrak{H} - \mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}_1$ angewendet, dann ergibt sich somit, daß *durch* $E(\alpha)$ *die Anzahl der gemeinsamen Stützgeraden von* $\mathfrak{H}$ *mit* $\mathfrak{S}_1$ *und damit auch die Anzahl der Schnittpunkte der Bereichsränder nicht vergrößert wird.*

Für die Krümmungsradien $r^{(0)}(\varphi)$ und $r^{(1)}(\varphi)$ der Randkurven entsprechender Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ gelten wegen (17) dieselben Aussagen wie für die Stützgeradenfunktionen derselben. Aus der ersten Aussage folgt daher, daß *durch* $E(\alpha)$ *die Anzahl der Scheitel (relative Extreme des Krümmungsradius) eines Bereiches nicht vergrößert wird.*

9. Die Transformation T (α).

Die bisherigen Betrachtungen dienten der Herleitung der wesentlichsten Eigenschaften der Transformation $E(\alpha)$. Als bemerkenswerteste Eigenschaft dieser Transformation ergab sich, daß durch wiederholte Anwendung derselben jeder stützbare Bereich $\mathfrak{H}^{(0)}$ so transformiert

werden kann, daß der transformierte Bereich $\mathfrak{H}^{(i)}$ beliebig wenig von der Kreisform abweicht, doch hat sich gezeigt (7, 6), daß die Bereichsfolgen $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ i. a. nicht konvergieren. Es muß daher getrachtet werden, die Transformation $E(\alpha)$ so abzuändern, daß zwar ihre wesentlichen Eigenschaften erhalten bleiben und doch die Konvergenz der Bereichsfolgen $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$ gewährleistet wird. Dies kann etwa in der Weise geschehen, daß die durch die Transformation $E(\alpha)$ bewirkte Vergrößerung eines Bereiches durch eine geeignete ähnliche Verkleinerung des transformierten Bereiches wieder aufgehoben wird. Am naheliegendsten erscheint es zunächst, eine zentrische ähnliche Verkleinerung $Z(\alpha)$ im Verhältnis $1:\cos\alpha$ von 0 aus vorzunehmen, da diese wegen (29) zur Folge hat, daß entsprechende Bereiche $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ dieser zusammengesetzten Transformation

$$U(\alpha) = Z(\alpha) * E(\alpha)$$

sodann umfanggleich werden.

An die Stelle der Differentialgleichung (16) tritt nunmehr

$$h^{(1)}(\varphi) - \operatorname{tg}\alpha\, h^{(1)}(\varphi) = h^{(0)}(\varphi - \alpha)$$

und an die Stelle der Integraldarstellung (20)

$$h^{(1)}(\varphi) = \cot\alpha \int_0^\infty h^{(0)}(\varphi - \alpha + \lambda)\, e^{-\lambda\cot\alpha}\, d\lambda,$$

während in den Transformationsgleichungen (32) und in allen daraus abgeleiteten Resultaten die auftretenden Faktoren c_ν (33) durch

$$d_\nu = c_\nu \,.\, \cos\alpha = \cos\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{38}$$

zu ersetzen sind; insbesondere ist daher $c_0 = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ durch $d_0 = 1$ und $c_1 = 1$ durch $d_1 = \cos\alpha$ zu ersetzen. Für die Transformation $U(\alpha)$ folgen demnach aus (29), (36), (26), (31) und (27) für nicht kreisförmige Bereiche die Beziehungen

$$\text{a) } L^{(1)} = L^{(0)}, \quad \text{b) } F^{(1)} > F^{(0)}, \quad \text{c) } \Delta^{(1)} < \Delta^{(0)} \tag{39}$$

$$r^{(1)}_{\text{Min}} > r^{(0)}_{\text{Min}}, \quad r^{(1)}_{\text{Max}} < r^{(0)}_{\text{Max}} \tag{40}$$

$$R^{(1)}_i > R^{(0)}_i, \quad R^{(1)}_u < R^{(0)}_u \tag{41}$$

$$B^{(1)}_{\text{Min}} > B^{(0)}_{\text{Min}}, \; B^{(1)}_{\text{Max}} < B^{(0)}_{\text{Max}} \tag{42}$$

während (37) wegen der Invarianz von $\frac{c_2}{c_0}$ gegenüber der Substitution (38) unverändert gültig bleibt.

Man bestätigt nun unmittelbar, daß die Transformation $U(\alpha)$, die in der Einleitung (1) angegebenen Eigenschaften 1, 2, 4, 7, 8 besitzt; dagegen sind die Eigenschaften 3, 5, 6 zunächst noch nicht erfüllt. Die Menge der Kreisbereiche $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1$ der Ebene Π ist zwar gegenüber $U(\alpha)$ invariant, jedoch in der Weise, daß die Komponenten $\mathfrak{P}_0$ aus $\mathfrak{K}_0$ fest bleiben, während die $\mathfrak{K}_1$ angehörigen Kreismitten $\mathfrak{P}_1$ eine $\cos\alpha$-fache Streckung zum Ursprung 0 erfahren. Es liegen somit hinsichtlich der Kreisbereiche bei der Transformation $U(\alpha)$ genau die gegenteiligen Verhältnisse wie bei der Transformation $E(\alpha)$ vor. Aus diesem Grunde kann daher die Transformation $U(\alpha)$ den Forderungen 5 und 6 der Einleitung nicht entsprechen.

Durch wiederholte Anwendung der Transformation $U(\alpha)$ auf einen Kreisbereich $\mathfrak{S}_1^{(0)}$ ergibt sich nunmehr die Folge $\{\mathfrak{S}_1^{(i)}\}$ umfanggleicher Kreise $\mathfrak{S}_1^{(i)}$ die offensichtlich gleichmäßig und damit auch im quadratischen Mittel gegen die gemeinsame nullte Komponente $\mathfrak{P}_0^{(0)} = \mathfrak{P}_0^{(i)}$ konvergiert. Die durch die Transformation $E(\alpha)$ bewirkte Annäherung eines Bereiches an seinen bestapproximierenden Kreis erfolgt wegen $d_\nu < c_\nu$ bei der Transformation $U(\alpha)$ in erheblich stärkerem Maße. *Es konvergiert daher auch die Bereichsfolge* $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$, *die sich durch wiederholte Anwendung der Transformation* $U(\alpha)$ *aus einem Bereich* $\mathfrak{H}^{(0)}$ *ergibt gleichmäßig und damit auch im quadratischen Mittel gegen die gemeinsame nullte Komponente* $\mathfrak{P}_0^{(0)} = \mathfrak{P}_0^{(i)}$ *der Bereiche* $\mathfrak{H}^{(i)}$.

Um nun von der Transformation $U(\alpha)$ zu der in der Einleitung erwähnten Transformation $T(\alpha)$ zu gelangen, muß nunmehr lediglich gefordert werden, daß die ersten Komponenten der Bereiche von der Transformation $U(\alpha)$ ausgenommen werden und diese somit ebenso wie die nullten Komponenten derselben invariant bleiben. Es kommt dies darauf hinaus, daß die Transformation $E(\alpha)$ nicht mit der für alle Bereiche gleichen zentrischen Ähnlichkeit $Z(\alpha)$ mit 0 als Zentrum zusammengesetzt wird, sondern die durch $E(\alpha)$ transformierten Bereiche jeweils einer zentrisch ähnlichen Verkleinerung im Verhältnis $1 : \cos\alpha$ von ihren Krümmungsschwerpunkten aus unterworfen werden. Dadurch wird erreicht, daß nunmehr jeder Kreisbereich und damit auch der bestapproximierende Kreis eines jeden Bereiches gegenüber der Transformation $T(\alpha)$ invariant ist. An dem Konvergenzverhalten der Bereichsfolgen $\mathfrak{H}^{(i)}$ tritt dadurch eine Änderung offensichtlich nicht ein.

Durch die wiederholte Anwendung der Transformation $T(\alpha)$ ergibt sich somit aus einem Bereich $\mathfrak{H}^{(0)}$ eine Bereichsfolge $\{\mathfrak{H}^{(i)}\}$, die gleichmäßig und damit auch im quadratischen Mittel gegen den gemeinsamen bestapproximierenden Kreis $\mathfrak{S}_1^{(0)} = \mathfrak{S}_1^{(i)}$ der Bereiche $\mathfrak{H}^{(i)}$ konvergiert.

Damit ist das Bestehen der wesentlichsten Eigenschaft der Transformation $T(\alpha)$ sichergestellt und es bleibt nunmehr bloß die Frage zu beantworten, ob auch die anderen in der Einleitung angeführten Eigenschaften dieser Transformation erfüllt sind. Zunächst stellt man fest, daß in teilweiser Abänderung von (38) in den Formeln (32) und den daraus abgeleiteten Resultaten an Stelle von $c_1 = 1$ nicht $d_1 = \cos\alpha$, sondern $\bar{d}_1 = 1$ zu setzen ist. Da der Umfang, der Flächeninhalt und das Defizit eines Bereiches jedoch von dessen erster Komponente unabhängig sind, so gelten daher die Beziehungen (39, a—c) auch unverändert für die Transformation $T(\alpha)$. Die Invarianz der Ordnungsbeziehung stützbarer Bereiche (5, 5), die für die Transformationen $E(\alpha)$ und $U(\alpha)$ gilt, trifft jedoch für die Transformation $T(\alpha)$ offensichtlich nicht mehr allgemein zu, sondern lediglich für solche Bereichspaare, die im Krümmungsschwerpunkt übereinstimmen. Obzwar die Beziehungen (40), (41) und (42) unter Benützung der Invarianz der Ordnungsbeziehung hergeleitet wurden, gelten sie doch auch allgemein für die Transformation $T(\alpha)$, da die darin auftretenden Größen von den ersten Komponenten der Bereiche und damit von der gegenseitigen Lage ihrer Krümmungsschwerpunkte unabhängig sind. Damit erscheinen nunmehr alle Eigenschaften der Transformation $T(\alpha)$, auf die in der Einleitung hingewiesen wurde, als richtig nachgewiesen.

Buchbesprechungen.

Philosophie der Naturwissenschaft. Von *A. Eddington*. (Aus dem Englischen übersetzt von K. Hauptvogel) (Sammlung „Die Universität": Band 6), 288 S. Wien: Humboldt-Verlag. 1949. Geb. S 23.—.

Zu dieser letzten Zusammenfassung seiner Anschauung vom Wesen physikalischer Naturerkenntnis, die der 1944 verstorbene Verfasser vor nunmehr 10 Jahren gegeben hat, kritisch Stellung zu nehmen, ist Sache der Physiker und der Philosophen. Der Mathematiker kann nur mit lebhaftem Interesse Kenntnis von Eddingtons Ausführungen nehmen und feststellen, daß seiner Auffassung nach die Tendenz der modernen physikalischen Theorien dahin geht, alle Naturgesetze als durch die Natur unseres Geistes a priori vorgeschriebene Erkenntnisformen zu erfassen. Damit erscheinen physikalische und mathematische Erkenntnis als wesensgleiche geistige Phänomene und es entfällt damit alle Problematik der Anwendung der Mathematik auf physikalische Fragen.

Wieweit dieses durch das Lebenswerk des Verfassers abgesteckte Programm Erfüllung finden wird, wird die Zukunft lehren. Das bisher Erreichte, worüber in dem vorliegenden Buch Rechenschaft abgelegt wird, läßt jedenfalls im Leser den Wunsch erstehen, Eddingtons Gedankengut möge von der kommenden Generation weiter gepflegt und ausgebaut werden.

Leider war es dem Referenten nicht möglich, die Übersetzung, die sich gut liest, an Hand des englischen Originals zu überprüfen. *J. Radon*, Wien.

Funzioni quasi abeliane. Von *F. Severi*. 327 S. Rom: Pontificiae Academiae Scripta Varia. 1947.

Die Theorie der Abelschen Funktionen, die in der Wiener mathematischen Schule der vergangenen Generation unter W. Wirtinger eine der hervorragendsten Pflegestätten besaß, hat in den letzten Jahren in Italien bedeutende Fortschritte von großer Tragweite gemacht. Nach den Vorlesungen über Abelsche Funktionen und Riemannsche Matrizen von Fabio Conforto (I. Teil, 304 S., Rom 1942; nur in geringer Auflage erschienen und gegenwärtig vergriffen), in denen ein ganz neuer Aufbau der Theorie vollzogen und ihre Anwendungen auf die algebraische Geometrie besprochen werden, ist vor allem die oben angezeigte Abhandlung des führenden italienischen Mathematikers F. Severi, der heuer seinen 70. Geburtstag und das 50. Jahr seiner wissenschaftlichen Tätigkeit feiert, hervorzuheben. Diese Abhandlung, die nicht etwa lange bekannte Tatsachen in neuer Gestalt vorbringt, sondern eine durchaus neue Forschungsarbeit in vollendeter Form darstellt, mag schon durch ihren großen Umfang überraschen und an die klassische Zeit der Mathematik erinnern; denn in der Tat handelt es sich hier um eine mit aller Gründlichkeit durchgeführte Erforschung eines bisher noch nicht bearbeiteten Problems, die bereits in den meisten wichtigen Punkten bis zur endgültigen Klärung vordringt.

Severi betrachtet die Klasse der einwertigen (analytischen) Funktionen von π Variablen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen (Weierstraß); diese sind im endlichen meromorph und besitzen $\mu \leqq 2\pi$ unabhängige Periodensysteme. Der Fall $\mu = 2\pi$ liefert die klassischen Abelschen Funktionen,

während $\mu < 2\pi$ die quasi-abelschen Funktionen umfaßt; sie könnten auch „degenerierte" Abelsche Funktionen genannt werden, da sie durch passende Grenzübergänge aus jenen gewonnen werden können, wobei eine oder mehrere Perioden unendlich groß werden und infolgedessen ausscheiden. Das Jacobische Umkehrproblem der π-Integrale 1. Gattung einer algebraischen Kurve vom Geschlechte π führt bekanntlich zu einem Körper Abelscher Funktionen von π-Variablen mit 2π unabhängigen Periodensystemen, die allerdings noch nicht die allgemeinsten Funktionen dieser Art sind. Eine stetige Änderung der algebraischen Kurve bedingt eine stetige Änderung des zugehörigen Abelschen Funktionenkörpers und des Periodenparallelotops. Gewinnt die Kurve in einer bestimmten Grenzlage neue Singularitäten, etwa δ_1 einfache Doppelpunkte und δ_2-Spitzen, so verringert sich ihr Geschlecht auf $p = \pi - \delta_1 - \delta_2$; dabei geht der Abelsche Funktionenkörper in den Körper der quasi-abelschen Funktionen über, welcher zu einer Kurve vom „effektiven" Geschlecht p gehört, auf der δ_1-Paare von getrennten Punkten und δ_2-Paare von zusammenfallenden Punkten als „neutrale" Punktgruppe ausgezeichnet sind und die daher das „virtuelle" Geschlecht $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ besitzt.

Diese Funktionen nennt Severi „spezielle quasi-abelsche Funktionen". Ihrer Untersuchung ist der erste Teil (80 S) der Abhandlung gewidmet, wobei Severi in Analogie zur klassischen Theorie vorgeht, indem er zunächst die zur vorgegebenen neutralen Punktgruppe gehörigen „neutralen" linearen Scharen, die kanonische Schar und den Riemann-Rochschen Satz ausführlich herleitet und bespricht, sodann die zugehörige Jacobische oder „quasi-abelsche" Mannigfaltigkeit (d. i. die Mannigfaltigkeit aller Punktgruppen von π-Punkten unserer Kurve), welche eine stetige abelsche (im Gegensatz zum klassischen Fall nur im allgemeinen) transitive Gruppe von ∞^{π} birationalen Transformationen in sich besitzt, endlich das Abelsche Theorem und das Jacobische Umkehrproblem. Die so entwickelten speziellen quasi-abelschen Funktionen bilden den Gegenstand des kurzen 2. Teiles, in dem ihre allgemeinen Eigenschaften untersucht werden; insbesondere ordnen sich hier die rationalen und die trigonometrischen Funktionen als spezielle quasi-abelsche Funktionen vom Geschlecht null ein.

Den Mittelpunkt der ganzen Abhandlung bilden die „allgemeinen quasi-abelschen Funktionen" (3. Teil), zu deren Erschließung die bisherigen Entwicklungen als Vorbereitung dienen. Diese legen 3 verschiedene Definitionen nahe, wonach sie definiert werden können: 1. als meromorphe Funktionen von π-Variablen mit einem, in einer gewissen Normalform vorgegebenen Periodensystem; 2. als Körper rationaler Funktionen des Punktes auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_π, die eine im allgemeinen transitive Gruppe von ∞^{π} birationalen Transformationen in sich besitzt; 3. als ebensolcher Körper auf einer $V_\pi = V_p \times S_\delta$, wo V_p die zu einem gewöhnlichen Abelschen Funktionenkörper gehörige Picardsche Mannigfaltigkeit ist, und S_δ ein linearer Raum ($\delta = \pi - p$). In einer mit Meisterschaft durchgeführten Analyse gelingt es Severi, die Äquivalenz dieser drei Definitionen zu zeigen unter einer gewissen Voraussetzung, deren endgültige Beseitigung das Ziel zukünftiger Arbeiten sein wird. Im folgenden Struktur- und Existenzsatz, der den Aufbau und die analytische Darstellung dieser Funktionen klarstellt, kommt die schwierige, alle Hilfsmittel der Funktionentheorie und algebraischen Geometrie erfordernde Untersuchung zum krönenden Höhepunkt, worauf sie im 4. Teil mit der Anwendung der allgemeinen Entwicklungen auf den besonderen Fall $\pi = 2$ ausklingt. Es ist kaum möglich, in kurzen Worten einen schwachen Eindruck von diesem bedeutenden Werk zu

vermitteln, der die Fülle der erschlossenen neuen Erkenntnisse, die weitsichtigen Perspektiven und die tiefschürfenden Analysen ahnen läßt, deren ganzes Gewicht sich erst beim ernsten und gründlichen Studium des Werkes selbst offenbaren kann. *W. Gröbner*, Innsbruck.

Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen. Von *W. Gröbner*. XII, 212 S. Wien und Innsbruck: Springer-Verlag. 1949. S 57.—, sfr. 24.80, $ 5.70.

Der Verfasser hat sich seit einer Reihe von Jahren die Aufgabe gestellt, dieses Gebiet rein idealtheoretisch zu begründen. In der Hamburger Einzelschrift, Heft 30, hat er damit den Anfang gemacht. In dem vorliegenden Werk werden nun die idealtheoretischen Grundlagen seiner Methode entwickelt. Es ist sehr zu begrüßen, daß ein Teil der Untersuchungen des Verfassers nun zusammenhängend vor uns liegt. Das Hauptproblem der algebraischen Geometrie ist der Begriff der Multiplizität eines Punktes in der algebraischen Mannigfaltigkeit und damit zusammenhängend der Bezoutsche Satz. Die irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeiten sind nun, idealtheoretisch gesehen, die irreduziblen Nullstellengebilde eines Primideals p (der Grundkörper sei algebraisch abgeschlossen). Allgemein läßt sich jedem Ideal (insbesondere jedem Primärideal eine Mannigfaltigkeit zuordnen. Dann definiert der Verfasser als Multiplizität eines Primärideals q, das zum Primideal p gehört, die Länge l einer Kompositionsreihe von q nach p. Dieser Begriff stimmt nicht immer mit dem üblichen unscharf erklärten Begriff überein. Auch der Bezoutsche Satz bleibt dann nicht immer erhalten. Aber dieses Festhalten an diesem Satz hat ja nur zu Schwierigkeiten geführt. Der Verfasser gibt genau an, wann dieser Satz gilt. Auf die genauere Formulierung muß ich allerdings verzichten.

Das Buch gliedert sich in fünf Paragraphen:

§ 1 Polynomringe: Es werden hier die grundlegenden Begriffe der abstrakten Algebra, soweit sie später benötigt werden, entwickelt. § 2 bringt die Nullstellentheorie der Polynomideale. Neu ist die Einführung der Eliminations- und Resultantenideale. In diesem Paragraph findet sich auch der zugrundegelegte Multiplizitätsbegriff. In den drei folgenden Paragraphen: Dimensionstheorie der Polynomideale, Hilbertfunktion und Syzygientheorie der H-Ideale liegt wohl das Hauptgewicht des Werkes. Hier finden sich Untersuchungen, die der Verfasser erst vor ganz kurzem publiziert hat. Die schwierige Theorie von Macaulay wird durch einen ganz neuen Weg zugänglich und für die algebraische Geometrie nutzbar gemacht. Der Noethersche Fundamentalsatz bildet ein Beispiel dafür. Das Buch stellt eine bedeutende wissenschaftliche Leistung dar. Die Darstellung ist durchsichtig, so daß man den Entwicklungen leicht folgen kann. Die Ausstattung des Buches ist eine gute. *E. Hlawka*, Wien.

Mathematik von der Mittelschule zur Hochschule. Von *L. Holzer*. Mit 11 Textabb. IV, 168 S. Graz-Wien: Leykam-Verlag. 1949. S 19.80.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß dem Studenten, wenn er gerade von der Mittelschule kommt, die Grundvorlesung über Differential- und Integralrechnung sehr große Schwierigkeiten bereitet. Ist es doch schon eine unangenehme Überraschung, wenn er sieht, daß für gänzlich „triviale" Dinge Beweise gegeben werden. Dies steigert sich, wenn die Regeln des Differenzierens, die ihm von der Mittelschule geläufig sind, durch die ε-Löcher gezwängt werden. Auch die komplexen Zahlen bereiten manchmal Schwierigkeiten. Der Verfasser legt

besonderen Wert auf die Beseitigung dieser Schwierigkeit, die ihm als die Hauptschwierigkeit erscheint. Dieser Ansicht dürften wohl nicht viele Hochschullehrer zustimmen. Es kommt noch hinzu, daß die komplexen Zahlen wieder in der Mittelschule behandelt werden. Natürlich wird die Situation nicht an allen Hochschulen die gleiche sein. Es ist zu begrüßen, daß der Verfasser versucht, eine Brücke von der Mittel- zur Hochschule zu schlagen. Hoffentlich ist dieser Versuch von Erfolg begleitet. 465 Aufgaben mit Lösungen sollen es dem Studenten ermöglichen, den Stoff zu verarbeiten. Ein besonderer Zug des Buches besteht gemäß der obigen Grundansicht des Verfassers darin, die Trigonometrie und analytische Geometrie komplex aufzubauen. Bei der Hesseschen Normalform der Geraden wäre es vielleicht doch vorzuziehen gewesen, mit Study, Beck usw., den Abstand eines Punktes von einer Geraden immer positiv zu rechnen. Die Herleitung der Formeln der Differential- und Integralrechnung ist natürlich oft nur skizziert und nicht immer ganz streng (siehe z. B. Kettenregel). Für eine Einführung genügt dies aber. Bei einem vertieften Studium muß man ja doch zu größeren Werken wie Knopp-Mangoldt usw. greifen. Einige Mängel werden sich bei einer allfälligen zweiten Auflage beseitigen lassen. Die Ausstattung des Werkes ist gut und der Druck übersichtlich.

E. Hlawka, Wien.

Hyperpolic Functions their Derivation and Applications in Vector Algebra. Von *C. A. Grover*. Mit 11 Textabb., II, 40 S. Manchester: Classifax Publications. 1948. 4 s. net.

In einer sehr leicht verständlichen Art werden der Hyperbelfunktionen erklärt und es wird gezeigt, wie man mit ihnen rechnet. Das Heft wendet sich in erster Linie an Elektroingenieure, muß aber auch allen anderen Interessenten empfohlen werden. *N. Hofreiter*, Wien.

Calcolo tensoriale e applicazioni. Von *B. Finzi* und *Maria Pastori*. VII, 427 S. Bologna: N. Zanichelli. 1949. Lire 2000.—.

Zwei Hauptzüge kennzeichnen dieses neue Lehrbuch der Tensorrechnung: die starke Betonung der Anwendungen und der stufenweise Aufbau der Theorie. Um zunächst von letzterem zu sprechen: zuerst werden Vektoren und Tensoren des euklidischen Raumes in rechtwinkligen Koordinaten betrachtet, dann der Tensorkalkül im euklidischen Raum in allgemeinen krummlinigen Koordinaten entwickelt. Erst nachdem der Leser auf diese Art einen wesentlichen Teil des Kalküls beherrschen und seinen Nutzen kennen gelernt hat, wird zum allgemeinen Riemannschen Raum übergegangen. Es folgen dann reichliche Anwendungen: Flächentheorie, Riemannsche Geometrie, Elastizität, Elektrodynamik, Relativitätstheorie; schon der Umstand, daß sie die reichliche Hälfte des Buches umfassen, läßt erwarten, daß sich die Autoren hier nicht mit einer kurzen Einführung begnügen. In der Tat findet man hier alle wesentlichen Prinzipien in knapper Form dargestellt. Am Schluß des Kapitels über die Relativitätstheorie wird über den eigentlichen Gegenstand des Buches hinausgreifend, noch die Theorie von H. Weyl als Beispiel einer Gravitation und Elektrodynamik umspannenden einheitlichen Feldtheorie kurz umrissen.

Die Verfasser haben die Bedeutung des schönen Buches nicht nur durch ein ausführliches Sachregister, sondern auch durch die Zusammenstellung der wichtigsten Formeln am Schluß jedes Kapitels erleichtert. *J. Radon*, Wien.

Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendung. Von *P. Gombás.* Mit 59 Textabb., VII, 406 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 186.—, geb. S 195.—; sfr. 80.—, geb. sfr. 85.—; $ 18.60, geb. $ 19.50.

Das vorliegende Werk ist eine systematische Darstellung eines für die Physik und physikalische Chemie wichtigen Gebietes. Für den Experimentalphysiker, technischen Physiker und Chemiker wird es von großem Nutzen sein. Der Verfasser selbst hat mannigfache Beiträge zu diesem Gebiet geliefert. Das Buch bringt im speziellen Teil, übersichtlich angeordnet und mit reichem Zahlenmaterial versehen, eine Fülle von praktisch anwendbaren Ergebnissen. Es sei nur einiges herausgegriffen: Jonisierungsenergien, Termberechnungen von Spektren, Atom- und Jonenradien, Streuvermögen, Potentialverteilung in Molekülen, Gitterenergien bei Kristallen, Berechnung der wichtigsten Konstanten bei Metallen (insb. bei Alkali- und Erdalkalimetallen) usw. Auf diese Dinge will ich hier nicht weiter eingehen, sondern, dem Rahmen dieser Zeitschrift entsprechend, auf den allgemeinen Teil besonders hinweisen. Dieser bringt die physikalischen und mathematischen Grundlagen. Hier bieten sich dem Mathematiker eine Reihe reizvoller Probleme. Im Mittelpunkt steht das statistische Modell nach Thomas-Fermi und seine Verfeinerungen. Man faßt in diesem Modell die Elektronen als ein entartetes Gas, in dem die Elektronenladung kontinuierlich verteilt ist, bei $T = 0$ auf und zieht zunächst nur die elektrostatische Wechselwirkung in Betracht. Dann kommt man auf die Gleichung $\Delta u = C u^{\frac{3}{2}}$ und wenn man gleich die kugelsymmetrischen Lösungen betrachtet, auf $x^{\frac{1}{2}} y'' = y^{\frac{3}{2}}$. Dazu kommen noch Randbedingungen. Die letztere Gleichung ist ein Spezialfall der Emdenschen Gaskugelgleichung. Hier geht man meist numerisch vor (mittels der Integriermaschine von Bush z. B). Näherungslösungen hat Sommerfeld angegeben. Selbstverständlich spielt in diesem Gebiet das Ritzsche Verfahren eine große Rolle (Lenz und Jensen). Wenn man die Austauschwechselwirkung berücksichtigt, kommt man auf die Thomas-Fermi-Dirasche Gleichung $y'' = x\,[(\frac{y}{x})^{\frac{1}{2}} + c]^3$.

Hier liegen überhaupt nur numerische Methoden vor. Weitere Verfeinerungen von Bethe, Bloch, Gombás, Hellmann, Jensen, Marshak, Weizsäcker u. a. führen im allgemeinen auf Gleichungen, die überhaupt noch nicht näher untersucht sind. Meistens greift man hier zur Störungsrechnung. Aus diesen kurzen Bemerkungen sieht man bereits, welche interessante Probleme dem Mathematiker und theoretischen Physiker hier winken. Das Buch ist als Standardwerk zu bezeichnen.

Die Ausstattung des Werkes ist eine vortreffliche. *E. Hlawka*, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Dr. phil. **Adalbert Duschek**

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

In vier Bänden

Erster Band

Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten

S 78.—, sfr. 33.90, $ 7.80, geb. S 87.—, sfr. 37.80, $ 8.70

Band II. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie. Ausgleichsrechnung. Lineare Gleichungen und Determinanten.

Band III. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Variationsrechnung.

Band IV. Grundzüge der Funktionentheorie.

Diese Bände befinden sich in Vorbereitung bzw. unter der Presse. Das Werk wird bis Ende 1951 vollständig vorliegen.

Aus dem Vorwort des Verfassers:

Das Buch ist in erster Linie für Techniker und Physiker gedacht. Ich hoffe aber, daß meine Arbeit nicht nur diesen, sondern weiteren Kreisen nützlich sein wird. Es gibt ja keine eigene Mathematik für Techniker und Physiker, sondern man kann nur den Stoff entsprechend den Bedürfnissen der Physik und Technik auswählen, aber was da gebracht wird, das ist Mathematik schlechthin, und diese kann in ihrer Art nicht durch äußere Zwecke beeinflußt werden. Es ist höchste Zeit, daß endlich ein für allemal mit dem Unfug aufgeräumt wird, anzunehmen, für den Naturwissenschaftler oder Techniker sei eine, sagen wir es ehrlich: schlampige, d. h. unexakte Darstellung der Mathematik am Platz. Mathematik kann man ja nicht einfach lernen wie Kochrezepte oder grammatikalische Regeln. Mathematik muß man verstehen. Man wird aber nie das rechte Verständnis erwecken, wenn man sich in Vorlesungen und Lehrbüchern gerade bei der Grundlegung über die prinzipiellen Schwierigkeiten großzügig hinwegsetzt. Nichts läßt sich durch eine unklare Darstellung klären.

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung

Von Prof. Dr. **A. Duschek**, Wien, und Dr. techn. **A. Hochrainer**, Wien. In drei Teilen

1. Teil: **Tensoralgebra.** Zweite Auflage. Mit 26 Textabb. VI, 129 Seiten. 1948. S 27.—, sfr. 12.—, $ 2.70

2. Teil: **Tensoranalysis.** Erscheint bis Ende 1949

3. Teil: **Anwendungen in Physik und Technik.** Erscheint 1950

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria